الأدهم
فى
الجبر
عام وأزهر
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم

الوحدة الأولى

الدرس الأول : مبدأ العد

① مضروب العدد

$\text{٥}! = \text{٥} \times \text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}$

$\text{٦}! = \text{٦} \times \text{٥}!$

$\text{ن}! = \text{ن}(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢}) \times \cdots \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}$

$\text{١}! = \text{١}$ ، $\text{٠}! = \text{١}$

إذا كان $\text{س}! = \text{١}$ فإن $\text{س} \in \{\text{٠}، \text{١}\}$

② التباديل : ترتيب لعدة أشياء مختلفة

${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!} = \text{ن}(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢}) \times \cdots \times (\text{ن}-\text{ر}+\text{١})$

حيث ر ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

$\text{ن} \geq \text{ر}$

${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ن}!$

${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{٠}} = \text{١}$

③ التوافيق: هو كل مجموعة جزئية تكونها بغض النظر عن الترتيب

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!\,\text{ر}!}$

حيث ر ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ ، $\text{ن} \geq \text{ر}$

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٠}} = \text{١}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = \text{١}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{١}} = \text{ن}$

④ قانون التبسيط

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$

مثال: ${}^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{٨}} = {}^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{٢}}$

${}^{\text{١٠٠}}\text{ق}_{\text{٩٨}} = {}^{\text{١٠٠}}\text{ق}_{\text{٢}}$

⑤ إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فإن

إما $\text{س} = \text{ص}$

أو $\text{س} + \text{ص} = \text{ن}$

⑥ قاعدة الضرب

كلمة و تحول إلى ضرب $\times$

⑦ قاعدة الجمع

كلمة أو تحول إلى جمع $+$

٨

٩ لاحظ ان القانون $^{ن+ر-١}ق_ر$

يستخدم فى توزيع عدد من الأشياء المتماثلة بدون شروط

١٠

تباديل	توافيق
الأعداد	اختيار شخص
الأزواج المرتبة	اختيار حرف
اختيار رئيس ونائب له	اختيار كرة
	المواد الدراسية
	المجموعات
	تكوين لجنة بدون درجات
	القطع المستقيمة

سر الفكرة إنك تحاول تبدل بين العناصر

إذا أضافت معنى جديد يبقى دى تباديل

إذا لم تضف شئ يبقى توافيق

١ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

الحل

ن = ٥ ، ر = ٢ فيه ترتيب وتكرار

$ن^ر = ٥^٢ = ٢٥$ طريقة

٢ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

الحل

ن = ٥ ، ر = ٢ فيه ترتيب وبدون تكرار

$^نل_ر = ^٥ل_٢ = ٥ × ٤ = ٢٠$ طريقة

٣ بكم طريقة يمكن تكوين فريق من ٤ أعضاء من بين ١٠ طلاب.

الحل

ن = ١٠ ، ر = ٤

مفيش ترتيب لأنهم أشخاص ومفيش تكرار

$^نق_ر = ^{١٠}ق_٤ = ٢١٠$ طريقة

٤ بكم طريقة يمكن توزيع ٥ نسخ من كتاب واحد على ٣ أرفف

الحل

فى الحالة دى ن = ٣ ، ر = ٥ بدون شروط

$^{ن+ر-١}ق_ر = ^٧ق_٥ = ٢١$ طريقة

⑤ بكم طريقة يمكن توزيع ٨ جوائز متمايزة بالتساوى على ٤ طلاب .

الحل

هنا فيه شرط وهو التساوى لكن كل واحد ؟

الأول ٢ من ٨ والثانى ٢ من ٦ والثالث ٢ من ٤

والرابع ٢ من ٢

و ← ×

$^8ق_2 \times {^6ق_2} \times {^4ق_2} \times {^2ق_2}$

$28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2520$

---

⑥ بكم طريقة يمكن وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة

الحل

هنا مفيش شروط

$ن = 3$ $ر = 8$

$^{ن+ر-1}ق_ر = {^{10}ق_8} = 45$

---

⑦ بكم طريقة يمكن وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة بحيث لا يوجد صندوق فارغ

الحل

هنا شرط انه لا يوجد صندوق فارغ

هنحط فى كل صندوق كرة علشان نضمن انه مفيش صندوق فارغ

هيتبقى ٥ كرات نوزعهم على ٣ صناديق

$ن = 3$ $ر = 5$ $^{ن+ر-1}ق_ر = {^7ق_5} = 21$

عدد جميع القطع المستقيمة الواصلة بين أى رأسين $^ن ق_2$

عدد أقطار أى مضلع $= {^ن ق_2} - ن$

---

⑧ أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه ٤

الحل

$^4ق_3 = 4$ مثلثات

---

⑨ أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه ٦ أضلاع

الحل

$ن = 6$ $^ن ق_2 - ن = {^6ق_2} - 6 = 9$ أقطار

وقوف "ر" سيارة فى "ن" مكان

صف

دائرة

وقوف "ر" سيارة متجاورة فى "ن" مكان

صف $(ن - ر + 1) \, ل ر$

دائرة $ن \, ل ر$

أوضاع عدد طرق وقوف

(١) ٤ سيارات فى موقف به ٥ أماكن متمايزة على شكل صف.

الحل: $^{ن}ل_{ر} = {}^{٥}ل_{٤} = ١٢٠$

---

(٢) ٤ سيارات فى موقف به ٥ أماكن متمايزة على شكل دائرة.

الحل: $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ر} = \frac{^{٥}ل_{٤}}{٤} = \frac{١٢٠}{٤} = ٣٠$

---

(٣) ٤ سيارات متجاورة فى ٥ أماكن على شكل صف

الحل: ن = ٥ ر = ٤

(ن − ر + ١) ر!

(٥ − ٤ + ١) ٤! = ٢ × ٢٤ = ٤٨

---

(٤) ٤ سيارات متجاورة فى موقف به ٥ أماكن متمايزة على شكل دائرة.

الحل: ن ر! = ٥ ٤! = ٥ × ٢٤ = ١٢٠

---

(٥) عدد طرق وقوف ٥ سيارات واحدة تلو الأخرى فى موقف به ٧ أماكن انتظار على شكل صف

الحل: $^{ن}ل_{ر} = {}^{٧}ل_{٥} = ٢٥٢٠$

واحدة تلو الأخرى = صف

---

(٦) أوجد عدد طرق عدد من ثلاثة أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

الحل:

آحاد	عشرات	مئات

٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

= ٣ × ٤ × ٥

---

(٧) أوجد عدد طرق تكوين عدد زوجى من ثلاثة أرقام مختلفة من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

الحل:

هنا شرط زوجى نبدأ به من الآحاد

آحاد	عشرات	مئات
~~٥~~ ٢	٤	٣

٢ × ٤ × ٣ = ٢٤

---

(٨) أوجد عدد طرق تكوين عدد أكبر من ٦٠٠ من الأعداد {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٧}

الحل:

هنا شرط المئات ٦ أو أكبر نبدأ منها

آحاد	عشرات	مئات

٣ × ٤ × ~~٥~~ ٢

٣ × ٤ × ٢ = ٢٤

(٩) إذا كان لدينا الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فأوجد كم عدداً زوجياً أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام:

(أ) مع الإحلال [التكرار] (ب) بدون الإحلال

الحل

(أ) احتمال أنه يكون أوله [٢ أو ٤] ويتكون من ٣ خانات أو ٤ خانات أو ٥ خانات وهنا فيه تكرار

$$٢×٥×٥×٥×٥ + ٢×٥×٥×٥ + ٢×٥×٣$$

$$= ١٢٥٠ + ٢٥٠ + ٣٠$$

$$= ١٥٣٠$$

(ب) في الحالة الثانية بدون تكرار وهنطبق الشروط

أوله ② من ٣ خانات = ١×٣×٣

أوله ④ من ٣ خانات = ١×٣×٢

من أربع خانات = ٢×٤×٣×٢

من خمس خانات = ٢×٤×٣×٢×١

= ٩ + ٦ + ٤٨ + ٤٨ = ١١١

(١٠) يراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال، ٣ نساء:

(أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين اللجنة

(ب) كم لجنة تحتوي على امرأة واحدة فقط

(ج) كم لجنة تحتوي على امرأة واحدة على الأقل

الحل

(أ) ٤ رجال من ٩ أو ٣ رجال وامرأة أو رجلان وامرأتان أو رجل و٣ نساء

٩ق٤ + ٩ق٣ × ٣ق١ + ٩ق٢ × ٣ق٢ + ٩ق١ × ٣ق٣ = ٤٩٥

= ١٢ق٤ = ٤٩٥

(ب) في حالة امرأة واحدة فقط يبقى معاها ٣ رجال

٩ق٣ × ٣ق١ = ٢٥٢

(ج) على الأقل معناه امرأة أو اثنان أو ثلاثة

٩ق٣ × ٣ق١ + ٩ق٢ × ٣ق٢ + ٩ق١ × ٣ق٣

= ٣٦٩

ولو مش مصدقني عدهم

اختر الاجابة الصحيحة

(١) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مأخوذة من مجموعة الأرقام : {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} = ...

الحل

ن = ٥ ، ر = ٢

الترتيب مهم والتكرار موجود

= $ن^ر$ = $٥^٢$ = ٢٥

(٢) اشترك ١٢ لاعباً فى مسابقة للسباحة ، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثانى والثالث ؟

الحل

ن = ١٢ ، ر = ٣

الترتيب مهم وبدون تكرار

$^{١٢}ل_٣$ = ١٢ × ١١ × ١٠ = ١٣٢٠

(٣) س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩} وكانت ع = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فإن عدد عناصر ع = ...

الحل

س = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} ∴ ن = ٥

ر = ٢ أزواج مرتبة بدون تكرار تباديل

$^ن ل_ر$ = $^٥ل_٢$ = ٢٠

(٤) عدد طرق اختيار حرفين أو ثلاثة أحرف مختلفة معاً من عناصر المجموعة {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و} هو ......

الحل

ن = ٦ ، ر = ٢ أو ٣

$^٦ق_٢$ أو $^٦ق_٣$ = $^٦ق_٢$ + $^٦ق_٣$

(٥) يجب على الطالب أن يجيب ١٠ أسئلة من ١٣ سؤال بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمسة الأولى ، كم طريقة ؟

الحل

٤ من ٥ و ٦ من ٨ أو ٥ من ٥ و ٥ من ٨

$^٥ق_٤$ × $^٨ق_٦$ + $^٥ق_٥$ × $^٨ق_٥$

= ١٩٦

(٦) أى القيم التالية يمكن أن تساويها ن ل ٢ ......

٢٤ ، ٢٥ ، ٢٧ ، (٣٠)

الفكرة هى حاصل ضرب عدد مفرودة من رقمين متتاليين

هنا ٣٠ = ٦ × ٥ ينفع ن = ٦

(٧) $^نق_{ن-٣}$ = ٢٠ فإن ن = ...

٣ ، ٤ ، ٥ ، (٦)

وإذا كانت من مجموعات فإنها تكون توافيق

الدرس الثاني: قوانين التباديل والتوافيق

١) $ن ل ر = ن(ن-١)(ن-٢) × \ldots\ldots (ن-ر+١)$

٢) $ن ل ن = ن!$ ، $ن ل ن-١ = ن!$

$٦ل٦ = ٦!$ ، $٦ل٥ = ٦!$

٣) إذا كان $ن ل ر = ن!$ فإن $ر = ن$ أو $ر = ن-١$

٤) $ن ل ر = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$

٥) $ن ل ٠ = ١$ ، $ن ل ١ = ن$ ، $٠! = ١! = ١$

٦) $ن ق ر = \frac{ن ل ر}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)! \cdot ر!}$

٧) $ن ق ر = ن ق ن-ر$ قانون التبسيط

$٢٠ق١٨ = ٢٠ق٢$

٨) قانون النسبة: $\frac{ن ق ر}{ن ق ر-١} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ ← الأكبر

٩) قانون الجمع: $ن ق ر + ن ق ر-١ = ن+١ ق ر$ ← الأكبر

أوجد قيمة ن في الحالات التالية

١) $(ن+٢)! = ٩٠ ن!$

الحل

$(ن+٢)(ن+١) ن! = ٩٠ ن!$

$١٠ × ٩ = ٩٠$

$ن+٢ = ١٠$ ∴ $ن = ٨$

---

٢) $ن ل ٢ = ٢$ ، $ن+ر ل ٢ = ٩٠$

الحل

$٢ل٢ = ٢$ ∴ $ن = ٢$

$ن+ر ل ٢ = ٩٠$ ، $٩٠ = ٩ × ١٠$

$ن+ر = ١٠$ ، $٢+ر = ١٠$

∴ $ر = ٨$

---

٣) $ن ق ٢ = ٢١$ ، $ن+ر ل ٣ = ٩٩٠$

الحل

$\frac{ن ل ٢}{٢!} = ٢١$ ، $ن ل ٢ = ٤٢$ (٦×٧)

∴ $ن = ٧$

$٧+ر ل ٣ = ٩٩٠$ حاصل ضرب ٣ علشان نقرب

$= ٩ × ١٠ × ١١$

∴ $٧+ر = ١١$ ، $ر = ١١-٧$ ، $ر = ٤$

$^{ن}ق_{ر} = ١٠$ ، $\frac{ن!}{ر!} = ٦$

$٦ = ٣ × ٢ × ١ = ٣!$

$ن - ر = ٣$ ← ①

$ن = ٣ + ر$ ∵ $^{ن}ق_{ر} = ١٠$

للتبسيط

$^{٣+ر}ق_{ر} = ^{٣+ر}ق_{(٣+ر)-ر}$ ∴ $^{٣+ر}ق_{ر} = ١٠$

$^{٣+ر}ق_{٣} = ١٠$

$^{٥}ق_{٣} = ١٠$ ∴ $٣ + ر = ٥$

∴ $ر = ٢$ ، $ن = ٥$

أمثلة على قانون النسبة

* $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$

* $\frac{^{١٠}ق_{٥}}{^{١٠}ق_{٤}} = \frac{١٠ - ٥ + ١}{٥} = \frac{٦}{٥}$

* $\frac{^{١٢}ق_{٦}}{^{١٢}ق_{٥}} = \frac{١٢ - ٦ + ١}{٦} = \frac{٧}{٦}$

* $\frac{^{٢٠}ق_{١٠}}{^{٢٠}ق_{١١}} = \frac{١١}{٢٠ - ١١ + ١} = \frac{١١}{١٠}$ قلبناه واقدر بالك

قانون الجمع

* $^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر-١} = ^{ن+١}ق_{ر}$

* $^{١٠}ق_{٥} + ^{١٠}ق_{٤} = ^{١١}ق_{٥}$

* $^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر+١} = ^{ن+١}ق_{ر+١}$ ← لأنه أكبر

① أوجد قيمة ر إذا كان $^{٧}ق_{ر} : ^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$

الحل

$\frac{٧ - ر + ١}{ر} = \frac{١}{٣}$ مقص

$ر = ٣ (٧ - ر + ١)$

$ر = ٢١ - ٣ر + ٣$

$ر + ٣ر = ٢٤$ $٤ر = ٢٤$

∴ $ر = ٦$

② إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، $^{ن+١}ق_{ر} : ^{ن+١}ق_{ر-١} = \frac{٣}{٥}$

أوجد قيمة $^{ن+١}ق_{ر-٢}$

الحل

∵ ن ل ر = ٧٢٠ = ل٦

∴ ن = ٦

∵ ٧ ق ر / ٧ ق ر-١ = (٧ - ر + ١) / ر = ٣/٥

٣ر = ٥ (٧ - ر + ١)

٣ر = ٣٥ - ٥ر + ٥

٨ر = ٤٠ ∴ ر = ٥

∵ ن+١ ق ر-٢ = ٧ ق ٣ = ٣٥

(ن - ر + ١) ل ن-ر / ل ن-ر = ٥

∴ ن - ر + ١ = ٥

ن - ر = ٤ ← ② × -٧ ونجمع

بحل المعادلتين ① ②

٧ن - ١٢ر = -٧

-٧ن + ٧ر = -٢٨

-٥ر = -٣٥

∴ ر = ٧ ، ن = ١١

③ إذا كان ن ق ر : ن ق ر-١ = ٥ : ٧ ، ن ل ر : ن ل ر-١ = ٥ فأوجد قيمة ن ، ر

الحل

∵ ن ق ر / ن ق ر-١ = (ن - ر + ١) / ر = ٥/٧

٥ر = ٧ن - ٧ر + ٧

٧ن - ١٢ر + ٧ = ٠

٧ن - ١٢ر = -٧ ← ①

∵ ن ل ر / ن ل ر-١ = ٥

ل ن / ل ن-ر × ل ن-ر+١ / ل ن = ٥

④ أثبت أن ن ق ر : ن-١ ق ر-١ = ن/ر واستخدم ذلك في إثبات أن

(٢٠٢٥ ق ٤ + ٢٠٢٤ ق ٣) / (٢٠٢٤ ق ٣ + ٢٠٢٣ ق ٢) = ٥٨/٩

الحل

ل ن / (ل ر × ل ن-ر) × (ل ر-١ × ل ن-١-ر+١) / ل ن-١

= ن ل ن-١ / (ل ر-١ × ر × ل ن-ر) × (ل ر-١ × ل ن-ر) / ل ن-١ = ن/ر #

المقدار المطلوب بقسمة البسط والمقام على ٢٠٢٤ ق ٣

(٢٠٢٥ ق ٤ / ٢٠٢٤ ق ٣ + ٢٠٢٤ ق ٣ / ٢٠٢٤ ق ٣) / (٢٠٢٤ ق ٣ / ٢٠٢٤ ق ٣ + ٢٠٢٣ ق ٢ / ٢٠٢٤ ق ٣) = (٢٥/٤ + ١) / (٣/٢٤ + ١) = ٥٨/٩ #

(٥) أثبت أن

$ {}^{ن}ق_{ر} + 2 \times {}^{ن}ق_{ر+1} + {}^{ن}ق_{ر+2} = {}^{ن+2}ق_{ر+2} $

ومن ذلك أوجد قيمة

$ {}^{10}ق_{5} + 2 \times {}^{10}ق_{6} + {}^{10}ق_{7} $

الحل

$ \left({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+1}\right) + \left({}^{ن}ق_{ر+1} + {}^{ن}ق_{ر+2}\right) $

$ {}^{ن+1}ق_{ر+1} + {}^{ن+1}ق_{ر+2} = {}^{ن+2}ق_{ر+2} $ #

المقدار المطلوب $= {}^{10+2}ق_{5+2} = {}^{12}ق_{7} = 792$

---

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة

$ \underline{|ن+2} \; \underline{|3ن-4} = \underline{|ن} \; \underline{|3ن-2} $

الحل

$ \frac{\underline{|ن+2}}{\underline{|ن}} = \frac{\underline{|3ن-2}}{\underline{|3ن-4}} $

$ {}^{ن+2}ل_{2} = {}^{3ن-2}ل_{2} $

$\therefore$ $3ن - 2 = ن + 2$

$3ن - ن = 2 + 2$

$2ن = 4$ $\therefore$ $\boxed{ن = 2}$

---

(٧) إذا كان $\underline{|1 + لو س} = 1$ فإن س = ... أو ..... (١ ، $\frac{1}{10}$)

إما $1 + لو س = 0$
$لو س = -1$
$س = (10)^{-1} = \frac{1}{10}$ أو

أو $1 + لو س = 1$
$لو س = 0$
$س = (10)^{0} = 1$

---

(٨) إذا كان أطوال أضلاع مثلث $\frac{1}{2}\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن-2}$ ، $\underline{|2-ن}$ سم

فأوجد القيمة العددية لمساحة المثلث

الحل

من الشروط $ن - 2 \geq 0$ ، $ن \geq 2$ ← ①

$2 - ن \geq 0$ ، $2 \geq ن$ ← ②

$\therefore$ $\boxed{ن = 2}$

$\frac{1}{2}\underline{|2}$ ، $\underline{|2-2}$ ، $\underline{|2-2}$

أطوال الأضلاع ١ ، ١ ، ١

وهو مثلث متساوي الأضلاع

$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times جا 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$ سم²

---

(٩) إذا كان ${}^{14}ق_{ر} = {}^{14}ق_{ر+2}$ فإن قيمة ر الموجبة

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٣ (د) ٢ أو ٣

---

(١٠) ${}^{ن+2}ق_{4} = ن^{2} - 3$ فإن ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٠

---

(١١) ${}^{9}ق_{ر} > {}^{9}ق_{ر-1}$ فإن

(أ) ر < ٤ (ب) ر > ٤

(ج) ر < ٥ (د) ر > ٥

$\frac{{}^{9}ق_{ر}}{{}^{9}ق_{ر-1}} > 1$ $\frac{9 - ر + 1}{ر} > 1$

وتكمل

الدرس الثالث: نظرية ذات الحدين

(١) $(س + أ)^ن = س^ن + {}^نق_١ أ س^{ن-١} + {}^نق_٢ أ^٢ س^{ن-٢} + {}^نق_٣ أ^٣ س^{ن-٣} + \dots + أ^ن$

(٢) عدد حدود المفكوك = ن + ١

(٣) أس (س) + أس (أ) = ن في كل حد

(٤) $(س - أ)^ن = س^ن - {}^نق_١ أ س^{ن-١} + \dots - \dots$

الإشارات (+ ، - ، + ، - ...) وهكذا

المسائل

(١) اكتب مفكوك $(س + ص)^٣$

الحل

$$= {}^٣ق_٠ س^٣ + {}^٣ق_١ ص س^٢ + {}^٣ق_٢ ص^٢ س + {}^٣ق_٣ ص^٣$$

$$= س^٣ + ٣ ص س^٢ + ٣ ص^٢ س + ص^٣$$

(٢) اكتب مفكوك $(٤ - ٣أ)^٤$

الحل

$$(٤)^٤ + {}^٤ق_١ (-٣أ)^١ (٤)^{٤-١} + {}^٤ق_٢ (-٣أ)^٢ (٤)^٢ + {}^٤ق_٣ (-٣أ)^٣ (٤)^{٤-٣} + {}^٤ق_٤ (-٣أ)^٤ × ٤^{٤-٤}$$

$$= ٢٥٦ - ٤ × ٣أ × ٦٤ + ٦ × ٩أ^٢ × ١٦ - ٤ × ٢٧أ^٣ × ٤ + ٨١ أ^٤$$

$$= ٢٥٦ - ٧٦٨ أ + ٨٦٤ أ^٢ - ٤٣٢ أ^٣ + ٨١ أ^٤$$

(٣) اكتب مفكوك $(س + \frac{١}{س})^٣$

الحل

$$= {}^٣ق_٠ (\frac{١}{س})^٠ س^{٣-٠} + {}^٣ق_١ (\frac{١}{س})^١ × س^{٣-١} + {}^٣ق_٢ (\frac{١}{س})^٢ س^{٣-٢} + {}^٣ق_٣ (\frac{١}{س})^٣ س^{٣-٣}$$

$$= س^٣ + ٣ × \frac{١}{س} × س^٢ + ٣ × \frac{١}{س^٢} × س + (\frac{١}{س})^٣$$

$$= س^٣ + ٣س + \frac{٣}{س} + \frac{١}{س^٣}$$

ملحوظة

$$(١+س)^ن = ١ + {}^نق_١ س + {}^نق_٢ س^٢ + {}^نق_٣ س^٣ + \dots + س^ن$$

$$(١-س)^ن = ١ - {}^نق_١ س + {}^نق_٢ س^٢ - {}^نق_٣ س^٣ + \dots \pm (-س)^ن$$

(٤) اكتب مفكوك $(١+س)^٥$ ثم استخدم ذلك في إثبات أن ${}^٥ق_٠ + {}^٥ق_١ + {}^٥ق_٢ + {}^٥ق_٣ + {}^٥ق_٤ + {}^٥ق_٥ = ٢^٥$

الحل

$$(١+س)^٥ = {}^٥ق_٠ + {}^٥ق_١ س + {}^٥ق_٢ س^٢ + {}^٥ق_٣ س^٣ + {}^٥ق_٤ س^٤ + {}^٥ق_٥ س^٥$$

بوضع س = ١

$$\therefore (١+١)^٥ = {}^٥ق_٠ + {}^٥ق_١ + {}^٥ق_٢ + {}^٥ق_٣ + {}^٥ق_٤ + {}^٥ق_٥ = ٢^٥$$ #

٥ فاكرين يا جماعة $(أ+ب)^ن (أ-ب)^ن = (أ^٢ - ب^٢)^ن$

مثلاً

أوجد مفكوك $(س-١)^٥ (س+١)^٥$

هنعملها $[(س-١)(س+١)]^٥$

$= (س^٢ - ١)^٥$ أكمل انت الحل

الحد العام

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (الثاني)^ر (الأول)^{ن-ر}$$

لو عايز رتبة حد من النهاية بدل الحدين وحل عادي

٦ فى مفكوك $(س+١)^٣ \times (س+١)^٤$

$= (س+١)^٧$ واكمل انت الحل

٩ فى مفكوك $(٣+س)^٧$ أوجد الحد الثالث وطبيعا دس

الحل

$ح_٣ = ح_{٢+١} = {}^٧ق_٢ \; س^٢ \times ٣^{(٧-٢)} = ٢١ س^٢ \times ٨١$

$= ١٧٠١ \; س^٢$

$ح_٦ = ح_{٥+١} = {}^٧ق_٥ \; س^٥ \; (٣)^{٧-٥} = ٢١ س^٥ \times ٩$

$= ١٨٩ \; س^٥$

٧ فى مفكوك $(١+س - \frac{١}{س})^٣$

$= [(١+س) - \frac{١}{س}]^٣$

↓ الحد الأول ↓ الحد الثاني

واكمل انت الحل

٨ أوجد قيمة $(١,٠٥)^٣$ باستخدام ذات الحدين

$(١ + ٠,٠٥)^٣$

$= ١ + {}^٣ق_١ (٠,٠٥)^١ + {}^٣ق_٢ (٠,٠٥)^٢ + \dots$

واكمل انت الحل

وهات الناتج بالآلة $(١,٠٥)^٣ = ١,١٥٧٦$

١٠ فى مفكوك $(١+أس)^٨$ اذا كان $ح_٢ = ٤$ ، معامل $ح_٥ = ١١٢٠$

أوجد قيمة أس

الحل

$ح_٢ = ح_{١+١} = {}^٨ق_١ (أس)^١ \times ١ = ٨ أس$

$٨ أس = ٤$

$أس = \frac{١}{٢}$

$ح_٥ = ح_{٤+١} = ق_٤^ن (أ س)^٤ × ١ = ٧٠ (أ س)^٤$

عند $س = ١$ لأنه معامل

$٧٠ × (أ)^٤ = ١١٢٠$

$أ^٤ = \frac{١١٢٠}{٧٠}$ $\frac{٧٠}{١٦}$

$أ = ± \sqrt[٤]{١٦} = ± ٢$

$\because أ س = \frac{١}{٢}$

عندما $أ = ٢$ فإن $س = \frac{١}{٤}$ || عندما $أ = -٢$ $س = \frac{-١}{٤}$

---

(١١) فى مفكوك $(٣ س^٢ - \frac{١}{س})^{١٣}$

أوجد الحد العاشر من النهاية

الحل

نعكس الحدين $(\frac{-١}{س} + ٣ س^٢)^{١٣}$

$ح_{١٠} = ح_{٩+١} = ق_٩^{١٣} (٣ س^٢)^٩ (\frac{-١}{س})^{١٣-٩}$

$= ٧١٥ × ٣^٩ × س^{١٨} × \frac{١}{س^٤}$

$= ٧١٥ × ٣^٩ × س^{١٤}$ بس كده

ملحوظة

$(س + أ)^ن + (س - أ)^ن = ٢ (ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + ...)$

$(س + أ)^ن - (س - أ)^ن = ٢ (ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + ...)$

(١٢) اكتب مفكوك $(س + \sqrt{٢})^٤ + (س - \sqrt{٢})^٤$

الحل

$= ٢ (ح_١ + ح_٣ + ح_٥)$

$= ٢ (س^٤ + ق_٢^٤ (\sqrt{٢})^٢ س^٢ + ق_٤^٤ (\sqrt{٢})^٤)$

$= ٢ (س^٤ + ٦ × ٢ س^٢ + ١ × ٤)$

$= ٢ (س^٤ + ١٢ س^٢ + ٤)$

$= ٢ س^٤ + ٢٤ س^٢ + ٨$

---

(١٣) اكتب مفكوك $(١ + \sqrt{س})^٥ - (١ - \sqrt{س})^٥$ وأوجد قيمة الناتج عند $س = ٣$

الحل

$٢ (ح_٢ + ح_٤ + ح_٦)$

$= ٢ (ق_١^٥ (\sqrt{س})^١ + ق_٣^٥ (\sqrt{س})^٣ + ق_٥^٥ (\sqrt{س})^٥)$

$= ٢ (٥ \sqrt{س} + ١٠ (\sqrt{س})^٣ + (\sqrt{س})^٥)$

$= ١٠ \sqrt{س} + ٢٠ س \sqrt{س} + ٢ س^٢ \sqrt{س}$

عند $س = ٣$

$= ١٠ \sqrt{٣} + ٦٠ \sqrt{٣} + ١٨ \sqrt{٣} = ٨٨ \sqrt{٣}$

الحد الأوسط والحدان الأوسطان

- n زوجية يوجد حد أوسط واحد $\frac{n+2}{2}$
- n فردية يوجد حدان أوسطان $\frac{n+1}{2}$ ، $\frac{n+3}{2}$

(١٤) أوجد قيمة $س$ إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{2س}\right)^{10}$ يساوي $\frac{28}{27}$

الحل

الحد الأوسط $= \frac{n+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$ح_6 = ح_{5+1} = {}^{10}ق_5 \left(\frac{1}{2س}\right)^5 (س^2)^{10-5} = \frac{28}{27}$

$252 \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{س^5} \times س^{10} = \frac{28}{27}$

$\frac{63}{8}\ س^5 = \frac{28}{27}$ $\times \left(\frac{8}{63}\right)$

$س^5 = \frac{32}{243}$

$س = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$

(١٥) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(3س + 2ص)^{13}$ متساويين

أثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$

الحل

الحدان الأوسطان هما $\frac{13+1}{2}$ ، $\frac{13+3}{2} = ح_7$ ، $ح_8$

$ح_{6+1} = ح_{7+1}$

${}^{13}ق_6 (2ص)^6 (3س)^{13-6} = {}^{13}ق_7 (2ص)^7 (3س)^{13-7}$

من قانون التبسيط

$(2ص)^6 \times (3س)^7 = (2ص)^7 (3س)^6$

$(2ص) = (3س)$

$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$ #

اختر

(١) إذا كان الحد الأوسط هو الحد التاسع في مفكوك $\left(\frac{2أ}{3} + \frac{ب}{أ^2}\right)^{n8}$ فإن $n = \ldots$

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢) من مفكوك $(1 + بس)^9$ يكون معامل $ح_6$ هو ...

(أ) ${}^9ق_5$ (ب) ${}^9ق_6$ (ج) ${}^9ق_5\ ب^5$ (د) ${}^9ق_6\ ب^6$

(٣) مفكوك ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة و ٦ حدود سالبة فإن المقدار على الصورة ...

(أ) $(أ - ب)^{١٢}$ (ب) $(أ + ب)^{١٣}$

(جـ) $(أ + ب)^{١٢}$ (د) $(أ - ب)^{١٣}$

---

(٤) الحد الاخير من مفكوك $(٢ + س)^{٥} (٢ - س)^{٥}$ هو ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $-س^{٥}$ (جـ) $-س^{١٠}$ (د) $س^{١٠}$

$(٤ - س^{٢})^{٥} = (-س^{٢})^{٥} = -س^{١٠}$

---

(٥) مفكوك $(أس + ب)^{٢ن+١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن ...

(أ) $أ = ٢ب$ (ب) $ب = ٢أ$

(جـ) $أب = ٢$ (د) $أب = \frac{١}{٢}$

---

(٦) مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ إذا كان

معامل $ح_{ر+٤}$ = معامل $ح_{٢ر+٣}$

فإن ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٧ (د) ٧

$ق^{١٧}_{ر+٣} \frac{١}{س} = ق^{١٧}_{٢ر+٣}$ (معامل)

$ق^{١٧}_{ر+٣} = ق^{١٧}_{٢ر+٣}$

$ر + ٣ + ٢ر + ٣ = ١٧$ ، $٣ر + ٥ = ١٧$

$٣ر = ١٢$ ، $ر = ٤$

---

(٧) مفكوك $(١ + س)^{ن}$

$(١ + س)^{ن} = ١ + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + أ_{٤}س^{٤}$
$+ ... + أ_{ن}س^{ن}$

وكان $\frac{أ_{٢} + أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$ فإن ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

هتحاول تجرب الحل اللي تلاقي $\frac{ق^{٨}_{٢} + ق^{٨}_{٣}}{ق^{٨}_{٢}} = ٣$

∴ ن = ٨ بس كده .

---

(٨) إذا كان $١ + \frac{٥}{٢}س + \frac{٥ \times ٤}{٤ \text{ لـ}٢}س^{٢}$
$+ \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٨ \text{ لـ}٣}س^{٣} + ... + \frac{١}{٣٢}س^{٥} = ١٠٢٤$

فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

الحل

الحد الأول ١ والأخير $(\frac{س}{٢})^{٥}$

$(١ + \frac{س}{٢})^{٥} = ١٠٢٤ = ٤^{٥}$

∴ $١ + \frac{س}{٢} = ٤$

$\frac{س}{٢} = ٣$

∴ س = ٦

مش عارف مدرستي كتبتوا هتحلها إيه

الدرس الرابع: إيجاد الحد المشتمل على $س^ك$

(١) أوجد الحد المشتمل على $س^٨$ فى مفكوك $(س + \frac{٢}{س^٢})^{١٤}$

الحل

نفرض أنه $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٤}ق_ر (\frac{٢}{س^٢})^ر (س)^{١٤-ر} = س^٨$

${}^{١٤}ق_ر \times ٢^ر س^{-٢ر} \times س^{١٤-ر} = س^٨$

$س^{-٢ر+١٤-ر} = س^٨$

$١٤ - ٣ر = ٨$

$١٤ - ٨ = ٣ر$

$٣ر = ٦$ ∴ $ر = ٢$

$ح_{ر+١} = ح_٣$ هو الحد المشتمل على $س^٨$

$ح_٣ = {}^{١٤}ق_٢ \times ٢^٢ \times س^٨ = ٣٦٤ س^٨$

(٢) أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك

$(٢س^٢ - \frac{١}{س})^{١٢}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر (\frac{-١}{س})^ر \times (٢س^٢)^{١٢-ر} = س^٠$

$س^{-ر} \times س^{٢٤-٢ر} = س^٠$

$س^{٢٤-٣ر} = س^٠$

$٢٤ - ٣ر = ٠$

$٢٤ = ٣ر$ $\boxed{ر = ٨}$

$ح_{٨+١} = ح_٩$ هو الحد الخالى من س

${}^{١٢}ق_٨ (-١)^٨ \times (٢)^{١٢-٨} = ٧٩٢٠$

(٣) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{١٥}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_ر (\frac{١}{س})^ر (س^٢)^{١٥-ر}$

${}^{١٥}ق_ر س^{-ر} س^{٣٠-٢ر}$

${}^{١٥}ق_ر س^{٣٠-٣ر} = س^٠$

$٣٠ - ٣ر = ٠$ $\quad ٣ر = ٣٠$

∴ $\boxed{ر = ١٠}$

∴ الحد الخالى من س = ${}^{١٥}ق_{١٠} = ٣٠٠٣$

الحدين الأوسطين هما $ح_٨$ ، $ح_٩$

$ح_٨ = {}^{١٥}ق_٧ (\frac{١}{س})^٧ (س^٢)^{١٥-٧}$ = معامله $\boxed{{}^{١٥}ق_٧}$

$ح_٩ = {}^{١٥}ق_٨ (\frac{١}{س})^٨ (س^٢)^{١٥-٨}$ معامله $\boxed{{}^{١٥}ق_٨}$

النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين

$$= \frac{\text{٣٠٠٣}}{\text{١٥ق٧} + \text{١٥ق٨}} = \frac{\text{٧}}{\text{٣٠}}$$

---

٤ اثبت أن الحد الخالي من س في مفكوك $\left(\text{س}^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٣}}}\right)^{\text{٥ن}}$ هو $\frac{\text{٥ن!}}{\text{٢ن!}\ \text{٣ن!}}$

الحل

$$\text{ح}_{\text{ر+١}} = \text{٥نقر} \left(\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٣}}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{\text{٢}})^{\text{٥ن}-\text{ر}}$$

$$= \text{٥نقر}\ \text{س}^{-\text{٣ر}} \times \text{س}^{\text{١٠ن}-\text{٢ر}}$$

$$= \text{٥نقر}\ \text{س}^{\text{١٠ن}-\text{٥ر}}$$

بوضع $\text{١٠ن} - \text{٥ر} = \text{٠}$

$\text{١٠ن} = \text{٥ر}$

$\boxed{\text{ر} = \text{٢ن}}$

الحد الخالي من س هو ٥نق٢ن

$$= \frac{\text{٥ن!}}{(\text{٥ن}-\text{٢ن})! \times \text{٢ن!}} = \frac{\text{٥ن!}}{\text{٣ن!} \times \text{٢ن!}} \quad \#$$

---

٥ في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{٢ن}}$ اثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨

الحل

$$\text{ح}_{\text{ر+١}} = \text{٢نقر} \left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س})^{\text{٢ن}-\text{ر}}$$

$$= \text{٢نقر}\ \text{س}^{-\text{ر}}\ \text{س}^{\text{٢ن}-\text{ر}}$$

$$= \text{٢نقر}\ \text{س}^{\text{٢ن}-\text{٢ر}}$$

بوضع $\text{٢ن} - \text{٢ر} = \text{٠}$ ∴ $\boxed{\text{ن} = \text{ر}}$

∴ الحد الخالي من س هو $\boxed{\text{٢نقن}}$

الحد الأوسط $= \frac{\text{٢ن} + \text{٢}}{\text{٢}} = \text{ن} + \text{١}$

$$\text{ح}_{\text{ن+١}} = \text{٢نقن} \left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} (\text{س})^{\text{٢ن}-\text{ن}}$$

$$= \text{٢نقن}\ \text{س}^{-\text{ن}}\ \text{س}^{\text{ن}}$$

$= \text{٢نقن} =$ الحد الخالي من س

عندما $\boxed{\text{ن} = \text{٨}}$

فإن هذا الحد $= \text{١٦ق٨} = \text{١٢٨٧٠}$

٦ اثبت أنه مفكوك $\left(س^{2} + \frac{2}{س^{3}}\right)^{11}$ لا يحتوي على حد خالٍ من س كما لا يحتوي على حد مشتمل على $س^{3}$

الحل

$ح_{ر+1} = {}^{11}ق_{ر} \left(\frac{2}{س^{3}}\right)^{ر} (س^{2})^{11-ر}$

$= {}^{11}ق_{ر}\ 2^{ر}\ س^{-3ر}\ س^{22-2ر}$

$= {}^{11}ق_{ر}\ 2^{ر}\ س^{22-5ر}$

أولاً بوضع $22 - 5ر = 0$

$5ر = 22$ ، $ر = 4.4$ مرفوض

لأن $ر \in ط$

∴ المفكوك لا يشتمل على حد خالٍ من س

ثانياً بوضع $22 - 5ر = 3$

$-5ر = 3 - 22$

$ر = \frac{19}{5}$ مرفوض

∴ المفكوك لا يشتمل على $س^{3}$

٧ أوجد معامل $س^{2}$ في حاصل ضرب $(1-2س)^{5}\ (1+س)^{10}$

الحل

$س^{2}$ هيجيلي من ٣ حالات

الثابت من الأول × $س^{2}$ من الثاني + س من الأول × س من الثاني + $س^{2}$ من الأول × الثابت من الثاني

$= \left[1 - {}^{5}ق_{1}\ 2س + {}^{5}ق_{2}(2س)^{2} - {}^{5}ق_{3}(2س)^{3} \ldots\right] \times \left[1 + {}^{10}ق_{1}\ س + {}^{10}ق_{2}\ س^{2} + {}^{10}ق_{3}\ س^{3} + \ldots\right]$

المطلوب $= 1 \times {}^{10}ق_{2}\ س^{2} - {}^{5}ق_{1} \times 2س \times {}^{10}ق_{1}\ س + {}^{5}ق_{2}(2س)^{2}$

$= {}^{10}ق_{2}\ س^{2} - \ldots$

$= 45س^{2} - 100س^{2} + 40س^{2}$

$= -15س^{2}$

٨ أوجد معامل $س^{5}$ في مفكوك

$(1 - س + س^{2})(1+س)^{11}$

الحل

$ح_{ر+1}$ هو الحد العام من مفكوك $(1+س)^{11} = {}^{11}ق_{ر}\ س^{ر}$

∴ $(1 - س + س^{2}) \times {}^{11}ق_{ر}\ س^{ر} =$

$= {}^{11}ق_{ر}\ س^{ر} - {}^{11}ق_{ر}\ س^{ر+1} + {}^{11}ق_{ر}\ س^{ر+2}$

* الجزء الأول يحتوي على $س^{5}$ عندما $ر = 5$ وقيمته ${}^{11}ق_{5}$
* الجزء الثاني يحتوي على $س^{5}$ عندما $ر + 1 = 5$ ، $ر = 4$ وقيمته $-{}^{11}ق_{4}$
* الجزء الثالث يحتوي على $س^{5}$ عندما $ر + 2 = 5$ ، $ر = 3$ وقيمته ${}^{11}ق_{3}$

∴ معامل $س^{5} = {}^{11}ق_{5} - {}^{11}ق_{4} + {}^{11}ق_{3} = 297$

الدرس الخامس : النسبة بين حدين متتاليين

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}}$$

(ر ← الأصغر)

١ أوجد النسبة بين الحدين الرابع والثالث في مفكوك $(س+3)^8$

الحل

$$\frac{ح_4}{ح_3} = \frac{ح_{3+1}}{ح_3} = \frac{8-3+1}{3} \times \frac{س}{3}$$

$$= \frac{6}{3} \times \frac{س}{3} = \frac{2}{3}س$$

---

٢ من مفكوك $\left(2س^2 + \frac{3}{س^2}\right)^{11}$ أوجد

الحل

أ $\frac{ح_3}{ح_2} = \frac{11-2+1}{2} \times \frac{\frac{3}{س^2}}{2س^2}$

$$= \frac{10}{2} \times \frac{3}{س^2} \times \frac{1}{2س^2} = \frac{15}{2س^4}$$

ب $\frac{ح_4}{ح_5}$ هتطلبها طبعاً

$$\frac{ح_5}{ح_4} = \frac{11-4+1}{4} \times \frac{3}{س^2} \times \frac{1}{2س^2}$$

$$= \frac{3}{س^4}$$

$$\therefore \frac{ح_4}{ح_5} = \frac{س^4}{3}$$

ج $\frac{\text{معامل } ح_6}{\text{معامل } ح_4} = \frac{\text{معامل } ح_6}{\text{معامل } ح_5} \times \frac{\text{معامل } ح_5}{\text{معامل } ح_4}$

$$= \frac{11-5+1}{5} \times \frac{3}{2} \times \frac{11-4+1}{4} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{7}{5} \times \frac{3}{2} \times \frac{8}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{63}{10}$$

---

٣ في مفكوك $\left(س^2 - \frac{1}{س}\right)^{14}$ أوجد النسبة بين الحد السابع والسادس عندما س = -1

الحل

$$\frac{ح_7}{ح_6} = \frac{14-6+1}{6} \times \left(\frac{-1}{س}\right) \div س^2$$

$$= \frac{9}{6} \times \frac{-1}{س^3} = \frac{-3}{2س^3}$$

عندما $س = -1$

$$\text{المقدار} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

④ أوجد أكبر حد في مفكوك

$(٣ + ٢س)^٦$ عندما $س = ١$

الحل

بفرض أن $ح_{ر+١}$ هو أكبر حد

عندنا شرطين

$\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} \geq ١$ ← الشرط الأول

$\frac{٦ - ر + ١}{ر} \times \left|\frac{٢}{٣}\right| \geq ١$

$\frac{٧ - ر}{ر} \geq \frac{٣}{٢}$

$١٤ - ٢ر \geq ٣ر$

$١٤ \geq ٥ر$

$\frac{١٤}{٥} \geq ر$

$ر \leq ٢٫٨$

$ر = ٢$ أو ١ أو ٠ ← ①

الشرط الثاني $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر+٢}} \geq ١$

$\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} \leq ١$

$\frac{٦ - (ر+١) + ١}{ر+١} \times \left|\frac{٢}{٣}\right| \leq ١$

$\frac{٦ - ر}{ر+١} \times \frac{٢}{٣} \leq ١$

$١٢ - ٢ر \leq ٣ر + ٣$

$١٢ - ٣ \leq ٥ر$

$٥ر \geq ٩$ ، $ر \geq ١٫٨$

$ر = ٢$ ، ٣ ، ٤ ← ②

من ① ، ② $\therefore ر = ٢$

$ح_٣$ هو أكبر حد فيه

⑤ في مفكوك $(١ + ٢س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية

إذا كان $ح_٣ = ١٧$ ، $٣ح_٣ \times ح_٤ = ٥٤٤$

أوجد قيمة ن ، س

الحل

$\because ح_٣ = ١٧$ $\therefore ح_{٢+١} = ١٧$

$^نق_٢ \, س^٢ = ١٧$

$\frac{ن(ن-١)}{٢} \times س^٢ = ١٧$

$ن(ن-١) س^٢ = ٣٤$ ← ①

، $٣ح_٣ \times ح_٤ = ٥٤٤$

$٣ \times {^نق_١} س \times {^نق_٣} س^٣ = ٥٤٤$

$٣ن \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣ \times ٢ \times ١} س^٤ = ٥٤٤$

$ن^٢ (ن-١) (ن-٢) س^٤ = ١٠٨٨$ ← ②

بتربيع المعادلة ① وقسمة (٢) على (١) تربيعه

$\frac{١٠٨٨}{(٣٤)^٢} = \frac{ن^٢ (ن-١)(ن-٢) س^٤}{ن^٢ (ن-١)^٢ س^٤}$

$$\frac{ن-٢}{ن-١} = \frac{١٠٨٨}{١١٥٦}$$

١١٥٦ن − ٢٣١٢ = ١٠٨٨ن − ١٠٨٨

١١٥٦ن − ١٠٨٨ن = −١٠٨٨ + ٢٣١٢

٦٨ن = ١٢٢٤

ن = ١٨

بالتعويض في (١)

١٨ × ١٧ $س^{٢}$ = ٣٤

$س^{٢} = \frac{٣٤}{٣٠٦} = \frac{١}{٩}$

∴ س = $\pm \frac{١}{٣}$

---

(٦) مفكوك $(١+س)^{ن}$ إذا كان معامل $ح_{١٠}$ هو الوسط الحسابي بين معامل $ح_{٩}$ ، معامل $ح_{١١}$ أوجد قيمة ن

(أ) ن (ب) $٣ل^{ن}$ (ج) |ن−١٩

الحل

$٢ح_{١٠} = ح_{٩} + ح_{١١}$ معاملات

÷ معامل $ح_{١٠}$

$$٢ = \frac{معامل\ ح_{٩}}{معامل\ ح_{١٠}} + \frac{معامل\ ح_{١١}}{معامل\ ح_{١٠}}$$

$$٢ = \frac{٩}{ن-٩+١} + \frac{ن-١٠+١}{١٠}$$

$$٢ = \frac{٩}{ن-٨} + \frac{ن-٩}{١٠} \quad \times ١٠(ن-٨)$$

٩٠ + (ن−٨)(ن−٩) = ٢٠(ن−٨)

٩٠ + $ن^{٢}$ − ٩ن − ٨ن + ٧٢ − ٢٠ن + ١٦٠ = ٠

$ن^{٢}$ − ٣٧ن + ٣٢٢ = ٠

(أ) ن = ٢٣ ، ن = ١٤

(ب) $٣ل^{ن} = ٣ل^{٢٣} = ١٠٦٢٦$ ، $٣ل^{ن} = ٣ل^{١٤} = ٢١٨٤$

(ج) |ن−١٩ = |٢٣−١٩ = |٤ = ٢٤ ، |١٤−١٩ غير ممكنة

الوحدة الثانية

الدرس الأول: الصورة المثلثية للعدد المركب

① الصورة الجبرية للعدد المركب

ع = س + ت ص

② ت   ت² = -١
ت³ = -ت   ت⁴ = ١

③ ع ← العدد المركب

④ ع̄ ← المرافق

⑤ مستوى أرجاند

ع = س + ت ص

الحقيقي على محور س
التخيلي على محور ص

① مثل على شكل أرجاند ع = ٢ + ٣ت

ع = (٢ + ٣ت)
ع̄ = (٢ - ٣ت)
-ع = (-٢ - ٣ت)

لاحظ أن العدد ومرافقه متماثلان حول محور السينات
والعدد ومعكوسه الجمعي متماثلان حول نقطة الأصل

② العدد ع = ٣ - ٤ت يمثل على شكل أرجاند بالنقطة م
حيث م (...، ...)
م (٣، -٤)

اختر الإجابة الصحيحة

③ ت + ت² + ت³ + ... + ت¹⁰⁰ = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ١٠٠

ت - ١ - ت + ١ = ٠   كل ٤ متتالية = ٠
يبقى المجموع كله = ٠

④ إذا كان ٣ - ت أحد جذري معادلة تربيعية
فإن الجذر الآخر هو ......
مرافقه   ٣ + ت

⑤ إذا كان ع، ع̄ عددين مترافقين
فإن ع + ع̄ يمكن أن يساوي

(أ) ٩ - ٤ت   (ب) ٥ت   (جـ) ١٣   (د) ١ + ت

مجموع أو حاصل ضرب العددين المترافقين = عدد حقيقي

المقياس والسعة الأساسية

(١) $ع = س + ص ت$ صورة جبرية

(٢) $ع = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$ صورة قطبية مثلثية

(٣) $س = ل جتا \theta$ ، $ص = ل جا \theta$

(٤) $ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ← المقياس

(٥) السعة الأساسية $\theta \in]-\pi ، \pi]$

الأول: $\theta = ظا^{-١}(\frac{ص}{س})$

الثانى: $\theta = \pi + ظا^{-١}(\frac{ص}{س})$

الثالث: $\theta = -\pi + ظا^{-١}(\frac{ص}{س})$

الرابع: $\theta = ظا^{-١}(\frac{ص}{س})$

(٩٠) ص+ ، (١٨٠) س- ، (٠) س+ ، (-٩٠) ص-

فى الشكل ده بنكتب الإشارات بدون تغيير

ملاحظات

العدد ع سعته θ

* فإن $\bar{ع}$ سعته $-\theta$

* $(-ع)$ سعته $(-\pi + \theta)$

* $\frac{١}{ع}$ سعته $(-\theta)$

إذا كان سعة العدد المركب ع هى θ
فإن سعة $ع^٢$ هى ٢θ

أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من وضع العدد على الصورة المثلثية

(١) $ع_١ = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

الحل

$ل = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = ١$

فى الربع الأول $\theta = ظا^{-١}(\frac{\sqrt{٣}}{٢} \div \frac{١}{٢}) = ٦٠^\circ$

$ل = ١$ ، $\theta = ٦٠^\circ$

$ع = ١ (جتا ٦٠^\circ + ت جا ٦٠^\circ)$

---

(٢) $ع_٢ = -\sqrt{٣} + ت$

الحل

$ل = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

فى س- ، ص+ فى الربع الثانى

$\theta = ١٨٠ + ظا^{-١} \frac{١}{-\sqrt{٣}} = ١٥٠^\circ$

$ع = ٢ (جتا ١٥٠^\circ + ت جا ١٥٠^\circ)$

---

(٣) $ع_٣ = -\sqrt{٣} - ٤ ت$

الحل

$ل = \sqrt{٣ + ١٦} = \sqrt{١٩}$ ومن الربع الثالث

$\theta = -١٨٠ + ظا^{-١} \frac{-٤}{-\sqrt{٣}}$

$\theta = -١١٣ ٤٤^\circ$

أكمل

④ $ع_٤ = ١$

يقع على الجزء الموجب لمحور س

$ل = ١ \quad \theta = ٠$

$ع_٤ = ١(جتا ٠° + ت حا ٠°)$

⑤ $ع_٥ = -١$

يقع على الجزء السالب لمحور س

$ل = ١ \quad \theta = ١٨٠°$

$= ١(جتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)$

⑥ $ع_٦ = ت$

تقع على الجزء الموجب لمحور ص

$ل = ١ \quad \theta = ٩٠°$

$ع_٦ = ١(جتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)$

⑦ $ع_٧ = -ت$

$ل = ١ \quad \theta = -٩٠°$

$ع_٧ = ١(جتا (-٩٠°) + ت حا (-٩٠°))$

تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية إلى صورة قياسية

ص

معدول $(١٨٠ - \theta)$ — معدول θ

مقلوبه $(٩٠° + \theta)$ — مقلوبه $(٩٠° - \theta)$

س — س

معدول $(-١٨٠ + \theta)$ — معدول $(-\theta)$ أو $(٣٦٠ - \theta)$

مقلوبه $(-٩٠° - \theta)$ — مقلوبه $(-٩٠° + \theta)$

ص

أعيد القياس واسمه لكل منه

① $٢(جتا ٢٠° + ت حا ٢٠°)$

الحل

فى الربع الأول معدول $\theta = ٢٠°$

$، ل = ٢$

② $حا ٢٤° + ت جتا ٢٤°$

الحل

فى الربع الأول مقلوبه حا، جتا تتبدليل

$٩٠ - \theta = ٩٠ - ٢٤ = -١٥٠°$ ←

$ل = ١$

(٣) ٨ − (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

الحل

أصلها ٨ (− جتا ٤٥° − ت جا ٤٥°)

في الثالث معدولة

السعة = −١٨٠ + θ = −١٨٠ + ٤٥ = −١٣٥°

ل = ٨

ع = ٨ (جتا (−١٣٥°) + ت جا (−١٣٥°))

---

(٤) ٢ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ − ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)

الحل

في الرابع مقلوبة

−٩٠ + $\frac{٤ \times ١٨٠}{٣}$ = ١٥٠°

ل = ٢

ع = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

---

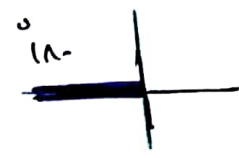
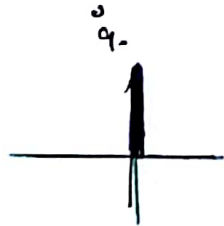
(٥) ١ + ت ظا ٢٠°

الحل

١ + ت $\frac{\text{جا } ٢٠°}{\text{جتا } ٢٠°}$

$\frac{١}{\text{جتا } ٢٠°}$ (جتا ٢٠° + ت جا ٢٠°)

المقياس = $\frac{١}{\text{جتا } ٢٠°}$

السعة = ٢٠°

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

إذا كان

ع١ = ل١ (جتا θ١ + ت جا θ١)

، ع٢ = ل٢ (جتا θ٢ + ت جا θ٢)

فإن

(١) ع١ ع٢ = ل١ ل٢ [جتا (θ١ + θ٢) + ت جا (θ١ + θ٢)]

(٢) $\frac{\text{ع١}}{\text{ع٢}}$ = $\frac{\text{ل١}}{\text{ل٢}}$ [جتا (θ١ − θ٢) + ت جا (θ١ − θ٢)]

(٣) عⁿ = لⁿ [جتا (ن θ) + ت جا (ن θ)]

مع الإشارة أنه يجب أن يكون العدد في الصورة القياسية

---

(١) إذا كان ع١ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت

ع٢ = ١ + ت

أوجد (أ) ع١ ع٢ (ب) $\frac{\text{ع٢}}{\text{ع١}}$ في الصورة المثلثية

الحل

ع١ : ل = $\sqrt{١ + ٣}$ = ٢ ، θ = ظا⁻¹ −$\sqrt{٣}$ = −٦٠°

ع٢ : ل = $\sqrt{١ + ١}$ = $\sqrt{٢}$ ، θ = ٤٥°

$ع_١ = ٢ \left(جتا (-٩٠°) + ت جا (-٩٠°) \right)$

$ع_٢ = \sqrt{٢} \left(جتا ٤٥ + ت جا ٤٥° \right)$

(أ) $ع_١ ع_٢ = ٢\sqrt{٢} \left(جتا (-١٠) + ت جا (-١٠°) \right)$

(ب) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} \left(جتا (٤٥+٦٠°) + ت جا (٤٥+٦٠°) \right)$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} \left(جتا ١٠٥° + ت جا ١٠٥° \right)$

---

(٢) إذا كان $ع_١ = ٢ (جتا ١٠° + ت جا ١٠°)$

$ع_٢ = ٣ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)$

أوجد العدد $ع_١^٤ ع_٢^٢$ على الصورة س + ت ص

الحل

$ع_١^٤ = ٢^٤ (جتا ٤×١٠ + ت جا ٤×١٠)$

$= ١٦ (جتا ٤٠ + ت جا ٤٠°)$

$ع_٢^٢ = ٣^٢ (جتا ٤٠×٢ + ت جا (٤٠×٢))$

$= ٩ (جتا ٨٠ + ت جا ٨٠)$

$\therefore ع_١^٤ ع_٢^٢ = ١٤٤ [جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°]$

$س = ١٤٤ جتا ١٢٠° = -٧٢$

$ص = ١٤٤ جا ١٢٠° = ٧٢\sqrt{٣}$

العدد $= -٧٢ + ٧٢\sqrt{٣}$ ت

---

(٣) إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi[$

أوجد مقياس وسعة العدد

$ع = ١ + جتا \theta + ت جا \theta$

الحل $جتا ٢م = ٢ جتا^٢ م - ١$

من قانون $١ + جتا ٢م = ٢ جتا^٢ م$

$١ + جتا ٢ × \frac{\theta}{٢} = ٢ جتا^٢ \frac{\theta}{٢}$

وكذلك $جا ٢م = ٢ جا م جتا م$

$جا ٢ × \frac{\theta}{٢} = ٢ جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢}$

$ع = ٢ جتا^٢ \frac{\theta}{٢} + ت × ٢ جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢}$

بأخذ $جتا \frac{\theta}{٢}$ عامل مشترك

$ع = ٢ جتا \frac{\theta}{٢} \left(جتا \frac{\theta}{٢} + ت جا \frac{\theta}{٢} \right)$

المقياس $= ٢ جتا \frac{\theta}{٢}$

والسعة الأساسية $= \frac{\theta}{٢}$

---

(٤) استخدم الأعداد المركبة في اثبات صحة العلاقة التالية $ظا^{-١} (\sqrt{٣}) + ظا^{-١} \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{\pi}{٢}$

الحل

نفرض أن $ع_١ = ١ + \sqrt{٣}$ ت

$ع_٢ = \sqrt{٣} +$ ت

$\therefore ع_١ ع_٢ = (١ + \sqrt{٣} ت)(\sqrt{٣} + ت)$

$= \sqrt{٣} + ت + ٣ت - \sqrt{٣} = ٤ت$

∴ سعة ع١ع٢ = سعة ٤ت

سعة ع١ + سعة ع٢ = ٩٠°

∴ $ظا^{-1} \sqrt{3} + ظا^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$

---

(٥) في الشكل المقابل أوجد $\frac{ع_2}{ع_1}$

الحل

$ع_1 = 2(جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)$

$ع_2 = 4(جتا(-٢٠°) + ت جا(-٢٠°))$

$\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{4}{2}[جتا(-٢٠-١٠٠°) + ت جا(-٢٠-١٠٠°)]$

$\frac{ع_2}{ع_1} = 2[جتا(-١٢٠°) + ت جا(-١٢٠°)]$

على صورة س + ت ص

$= -1 - \sqrt{3}\ ت$

---

(٦) إذا كان $|ع_1| = |ع_2| = 1$

، سعة $(ع_1 ع_2^3) = ٨١°$

، سعة $(\frac{ع_1}{ع_2}) = ٣٣°$

أوجد على صورة س + ت ص العدد $ع_1^{15} ع_2^{15}$

الحل

سعة $(ع_1 ع_2^3)$ = سعة $(ع_1)$ + ٣ سعة $(ع_2)$ = ٨١° ← (١)

، سعة $(\frac{ع_1}{ع_2})$ = سعة $(ع_1)$ − سعة $(ع_2)$ = ٣٣° ← (٢)

بحل المعادلتين بالطرح

٤ سعة $ع_2$ = ٨١° − ٣٣°

∴ سعة $(ع_2)$ = ١٢°

، سعة $(ع_1)$ = ٨١ − ٣٦ = ٤٥°

∴ $ع_1$ = جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°

$ع_2$ = جتا ١٢° + ت جا ١٢°

$ع_1^{15} ع_2^{15} = (ع_1 ع_2)^{15}$ = (جتا ٥٧° + ت جا ٥٧°)^{15}

نضرب ١٥ × ٥٧° ونطرح ٣٦٠ أكثر من مرة لحد ما نوصل لزاوية بين −١٨٠، ١٨٠°

= ١٣٥°

∴ $ع_1^{15} ع_2^{15}$ = (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°)

$= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ ت$

---

(٧) إذا كان $ع_1$ = جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°

، $ع_2$ = جتا ١٥° + ت جا ١٥°

أوجد الصورة المثلثية للعدد $ع_1 + ع_2$

الحل

$ع_1 + ع_2$ = جتا ٧٥° + جتا ١٥° + ت جا ٧٥° + ت جا ١٥°

تمارين الزوايا التي قياسها ٢ث تكملة أول

$جتا ٧٥° = جتا (٤٥° + ٣٠°)$

$= جتا ٤٥° جتا ٣٠° - جا ٤٥° جا ٣٠° = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

$جتا ١٥° = جتا (٤٥° - ٣٠°)$

$= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠° = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

$جا ٧٥° = جا (٤٥° + ٣٠°)$

$= جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠° = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

$جا ١٥° = جتا ٧٥°$ وهكذا

$= \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

المقدار $= \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤} + \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤} + (\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤} + \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤})ت$

$= \frac{٢\sqrt{٦}}{٤} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٤} ت$

$= \frac{\sqrt{٦}}{٢} + \frac{\sqrt{٦}}{٢} ت$

$ل = |ع_١ + ع_٢| = \sqrt{\frac{٦}{٤} + \frac{٦}{٤}} = \sqrt{٣}$

$\theta = ظا^{-1} (\frac{\sqrt{٦}}{٢} \div \frac{\sqrt{٦}}{٢}) = ٤٥°$

$\therefore ع_١ + ع_٢ = \sqrt{٣} (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)$

اختر الإجابة اللي تعجبك

١ إذا كان ع عدداً مركباً سعته الأساسية θ فإن $\frac{١}{ع}$ سعته هي ....

(أ) θ (ب) $-\theta$ (ج) $\pi - \theta$ (د) $-\pi + \theta$

٢ الشكل المقابل يمثل العدد المركب

(ص، س، ٣، ٣٠°)

(أ) $٣(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)$

(ب) $٣(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$

(ج) $٣(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)$

(د) $٣ جتا(١٥٠° + ت جا ١٥٠°)$

٣ في الشكل المقابل $\frac{ع_١}{ع_٢} = ...$

(ص، س، $ع_١$، $ع_٢$، ٨، ٤)

(أ) -٢ (ب) ٢ (ج) $-٢ت$ (د) $٢ت$

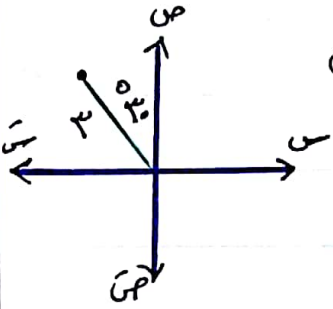
هشرحها دي

$ع_١ = ٨ (جتا (١٨٠ - \theta) + ت جا (١٨٠ - \theta))$

$ع_٢ = ٤ (جتا (-٩٠ - \theta) + ت جا (-٩٠ - \theta))$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = ٢ ⟨ ١٨٠ - \theta - [-٩٠ - \theta]$

$١٨٠ - \theta + ٩٠ + \theta = -٢٧٠ = ٩٠°$

$= ٢ [جتا (-٩٠°) + ت جا (-٩٠°)] = -٢ت$

٤ أي مما يأتي يمثل الصورة الجبرية للعدد $٢(جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣})$

بالآلة $-١ + \sqrt{٣} ت$

٥ $ع = \sqrt{٢} (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°)$ فإن السعة الأساسية = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

مضلعه في الربع الأول $٩٠ - ٣٠ = ٦٠°$

ركز في الكلام ده

$ع_1 \leftarrow \theta_1$

$ع_2 \leftarrow \theta_2$

فإن $ع_1 ع_2 \leftarrow \theta_1 + \theta_2$

$\frac{ع_1}{ع_2} \leftarrow \theta_1 - \theta_2$

$٢ ع \leftarrow \theta_1$

$ن ع \leftarrow \theta_1$

$ع^{ن} \leftarrow ن\theta$

$ع^{٥} \leftarrow ٥\theta$ وهكذا

---

٦ إذا كان $ع = (١ + \sqrt{٣} ت)^{ن}$ وكان $|ع| = ٨$

فإن السعة الأساسية للعدد ع = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (ج) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

الفكرة

$(١ + \sqrt{٣} ت)$ المقياس = ٢ ، $\theta = ٦٠°$

$٢^{ن} = ٨$ ∴ ن = ٣

السعة الأساسية $ع^{٣} = ٣ \times \theta = ٣ \times ٦٠ = ١٨٠°$

---

٧ إذا كانت $ع_1 = ل_1(جتا \theta_1 + ت جا \theta_1)$

$ع_2 = ل_2(جتا \theta_2 + ت جا \theta_2)$

وكان $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ فإن $ع_1 ع_2 = ...$

(أ) $ل_1 ل_2$ (ب) $-ل_1 ل_2$ (ج) $ل_1 ل_2 ت$

$ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 (جتا(\theta_1 + \theta_2) + ت جا(\theta_1 + \theta_2))$ (−١ ، صفر)

$= -ل_1 ل_2$

---

٨ إذا كانت $ع = (\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)^{ن}$

حيث ن عدد صحيح موجب وكان ع = ١

فإن أصغر قيم ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (ج) ٣ (د) ١

الفكرة $|ع| = ١$ $\theta = ٦٠°$

عند ن = ١ $(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°) \neq ١$

عند ن = ٣ $(جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°) = -١$

عند ن = ٦ $(جتا ٠ + ت جا ٠) = ١$

الدرس الثاني: الصورة الأسية للعدد المركب

$هـ^{ت\theta} = جتا\theta + ت جا\theta$

$ع = ل هـ^{ت\theta}$

حيث θ بالتقدير الدائري

$1 = جتا ٠ + ت جا ٠ = هـ^{صفر}$

$-1 = جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠ = هـ^{\pi ت}$

$ت = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ = هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$

$-ت = جتا(-٩٠) + ت جا(-٩٠) = هـ^{\frac{-\pi}{2} ت}$

اكتب العدد في الصورة الأسية لكل مما يأتي

(١) $ع = -١ + ت$

الحل

$ل = \sqrt{2}$ ، θ في الثاني $(-، +)$

$\theta = \pi + ظا^{-1}(\frac{1}{-1}) = ١٣٥° = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore ع = \sqrt{2} هـ^{\frac{3\pi}{4} ت}$

(٢) $ع = -١ - ت$ **الحل**

$ل = \sqrt{2}$ ، $\theta = -\pi + ظا^{-1} ١ = -١٣٥ = \frac{-3\pi}{4}$

$ع = \sqrt{2} هـ^{\frac{-3\pi}{4} ت}$

(٣) $\frac{4}{1 + \sqrt{3} ت}$ **الحل**

بالضرب × المرافق $\frac{\sqrt{3} ت - 1}{\sqrt{3} ت - 1}$

$\frac{4 \times (\sqrt{3} ت - 1)}{(\sqrt{3} ت - 1)(\sqrt{3} ت + 1)} = \frac{4(\sqrt{3} ت - 1)}{(3 + 1)}$

$= \sqrt{3} ت - 1$

$ل = 2$ ، الرابع $(+، -)$

$\theta = ظا^{-1} = -\sqrt{3} = -٦٠° = \frac{-\pi}{3}$

$ع = 2 هـ^{\frac{-\pi}{3} ت}$

(٤) أكمل $هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = ----$

$(جتا\theta + ت جا\theta) + (جتا -\theta + ت جا(-\theta))$

$جتا\theta + ت جا\theta + جتا\theta - ت جا\theta = 2 جتا\theta$

(٥) القيمة العددية للمقدار $هـ^{\pi ت} - هـ^{-\pi ت} = ----$

نحل بالدالة كلا منهما على الجزء السالب لمحور السينات

كل منهما $= -١$

$\therefore -١ - (-١) = -١ + ١ = صفر$

لاحظ أنه في الصورة الأسية يكون $\pi = -\pi$

٦ $Z = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

الحل

$r = \frac{1}{2}$ ، $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$Z = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{3} i}$

$Z = -4(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$

$= 4(-\cos 210^\circ - i \sin 210^\circ)$

من الثالث معدولة $(-,-)$

$\theta = 180^\circ + 210^\circ = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$Z = 4 e^{\frac{\pi}{6} i}$

٧ ضع العدد $\frac{\sqrt{2}\, i}{1+i}$ على الصورة الجبرية والمثلثية والأسية

الحل

$\frac{\sqrt{2}\, i}{1+i} \times \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{\sqrt{2}\, i(1-i)}{(1+1)}$

الجبرية

$\frac{1}{\sqrt{2}}(i+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$r = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ ، $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

المثلثية $= (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

الأسية $= e^{\frac{\pi}{4} i}$

٨ أثبت أن $\cos\theta = \frac{1}{2}[e^{\theta i} + e^{-\theta i}]$

الحل

$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-\theta i} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ بالجمع

$= \cos\theta - i\sin\theta$

$2\cos\theta = e^{\theta i} + e^{-\theta i}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}[e^{\theta i} + e^{-\theta i}]$

٩ لإثبات أن $\sin\theta = \frac{i}{2}(e^{-\theta i} - e^{\theta i})$

نفس الخطوات لكن بالطرح

حاول تحلها

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية

إذا كان $Z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$

$Z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$

فإنه

$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2) i}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1-\theta_2) i}$

$Z^n = r^n e^{(n\theta) i}$

$n \in \mathbb{Z}$

(١٠) إذا كان $ع_1 = 2(\text{جتا } 75° + ت \text{ جا } 75°)$

$ع_2 = 4(\text{جتا } 15° + ت \text{ جا } 15°)$

أوجد على الصورة الأسية

(أ) $ع_1 ع_2$ ، (ب) $\frac{ع_1}{ع_2}$

الحل

(أ) $ع_1 ع_2 = 8\left(\text{جتا }(75+15) + ت \text{ جا }(75+15)\right)$

$= 8(\text{جتا } 90° + ت \text{ جا } 90°)$

على الصورة الأسية $= 8 هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$

(ب) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2}{4}\left[\text{جتا }(75°-15°) + ت \text{ جا }(75°-15°)\right]$

$= \frac{1}{2}(\text{جتا } 60° + ت \text{ جا } 60°)$

على الصورة الأسية $= \frac{1}{2} هـ^{\frac{\pi}{3} ت}$

---

(١١) في الشكل المقابل أوجد على الصورة الأسية العدد $\frac{ع_1}{ع_2}$

(شكل: محاور س ، س' ، ص ، ص' ؛ $ع_1$ على بعد 2 بزاوية 10° من ص ، $ع_2$ على بعد 4 بزاوية 10° من س')

الحل

$ع_1 = 2(\text{جتا } 100° + ت \text{ جا } 100°)$

$ع_2 = 4\left[\text{جتا } -170° + ت \text{ جا }(-170°)\right]$

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2}{4}\left[\text{جتا }(170+100) + ت \text{ جا } 270°\right]$

لاحظ $270 = -90 = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{1}{2} هـ^{-\frac{\pi}{2} ت}$ على الصورة الأسية

---

(١٢) إذا كان $ع_1 = 6(\text{جتا } 240° + ت \text{ جا } 240°)$

$ع_2 = 2(\text{جتا } 300° + ت \text{ جا } 300°)$

فأوجد على الصورة الأسية

(أ) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{6}{2}\left[\text{جتا }(240°-300°) + ت \text{ جا }(240-300)\right]$

$= 3\left[\text{جتا }(-60°) + ت \text{ جا }(-60°)\right]$

$= 3 هـ^{-\frac{\pi}{3} ت}$

(ب) $\frac{ع_2}{ع_1} = \left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)^{-1} = \left[3 هـ^{-\frac{\pi}{3} ت}\right]^{-1}$

$= \frac{1}{3} هـ^{\frac{\pi}{3} ت}$

(ج) $ع_1^2 \Leftarrow 6^2 = 36$

$2 \times 240 = 480 - 360 = 120 = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore ع_1^2 = 36 هـ^{\frac{2\pi}{3} ت}$

الدرس الثالث: نظرية ديموافر

(١) $ع^ن = ل^ن$ (جتا ن θ + ت جا ن θ)

في حالة الأس الكسري [الجذور]

(٢) $ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{\frac{1}{ن}}$ [جتا $\left(\frac{θ + ٣٦٠ ر}{ن}\right)$ + ت جا $\left(\frac{θ + ٣٦٠ ر}{ن}\right)$]

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... (ن-١)

(١) إذا كان ع = ٤ + ٤ $\sqrt{٣}$ ت

أوجد

(أ) الصورة الأسية للعدد ع

(ب) أوجد $ع^٢$

(ج) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع ومثلها على شكل أرجاند

الحل

(أ) ل = $\sqrt{١٦ + ٤٨}$ = ٨

θ = ظا$^{-1}$ $\frac{٤\sqrt{٣}}{٤}$ = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

ع = ٨ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

(ب) $ع^٢ = ٨^٢$ هـ$^{\frac{\pi}{٣} \times ٢ ت}$ = ٦٤ هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

(ج) ∵ ع = ٨ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

∴ الجذور التكعيبية للعدد ع

= ٢ هـ$^{\left[\frac{\frac{\pi}{٣} + ٣٦٠ ر}{٣}\right]ت}$

عند ر = ٠ : $ع_١$ = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٩}ت}$

عند ر = ١ : $ع_٢$ = ٢ هـ$^{\frac{٧\pi}{٩}ت}$

عند ر = ٢ : $ع_٣$ = $\frac{-٥}{٩}\pi$ ت

ملحوظة عند التمثيل على شكل ارجاند

هتقسم $\frac{٣٦٠}{\text{عدد الجذور}} = \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠°$

يبقى الزاوية بين كل جذرين ١٢٠° اكتب الجذر الأول وكمل بالزاوية .

(٢) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد

للعدد ع = ٢ - ٢ $\sqrt{٣}$ ت على الصورة المثلثية

الحل

ل = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤

(+ ، -) الرابع ⇐ θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = -٦٠°

ع = ٤ [جتا (-٦٠°) + ت جا (-٦٠°)]

الجذور التربيعية للعدد ع

$ع = ٢ \left[جتا\left(\frac{-٦٠ + ٣٦٠ ر}{٢}\right) + ت جا\left(\frac{-٦٠ + ٣٦٠ ر}{٢}\right) \right]$

ر = ٠ $ع_١ = ٢ [جتا (-٣٠°) + ت جا (-٣٠°)]$

ر = ١ $ع_٢ = ٢ [جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°]$

٣ مثل على شكل أرجاند الجذور الخامسة للعدد -٣٢

الحل

ل = ٣٢ ، θ = ١٨٠° لأنه يقع على الجزء السالب من محور السينات

$ع = ٣٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)$

الجذور الخامسة للعدد ع

$= ٢ \left(جتا \frac{١٨٠ + ٣٦٠ ر}{٥} + ت جا \frac{١٨٠ + ٣٦٠ ر}{٥} \right)$

ر = ٠ $ع_١ = ٢ (جتا ٣٦° + ت جا ٣٦°)$

ر = ١ $ع_٢ = ٢ (جتا ١٠٨° + ت جا ١٠٨°)$

ر = ٢ $ع_٣ = ٢ [جتا (١٨٠°) + ت جا (١٨٠°)]$

ر = ٣ $ع_٤ = ٢ [جتا (-١٠٨°) + ت جا (-١٠٨°)]$

ر = ٤ $ع_٥ = ٢ [جتا (-٣٦°) + ت جا (-٣٦°)]$

٤ استخدم نظرية ديموافر للتعبير عن كل من جتا ٢θ ، جا ٢θ بدلالة جا θ ، جتا θ

الحل

$\because جتا ٢θ + ت جا ٢θ = (جتا θ + ت جا θ)^٢$

$\therefore جتا ٢θ + ت جا ٢θ = جتا^٢ θ + ٢ت جا θ جتا θ - جا^٢ θ$

$جتا ٢θ + ت جا ٢θ = جتا^٢ θ - جا^٢ θ + ٢ جا θ جتا θ ت$

بمساواة الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

$\therefore جتا ٢θ = جتا^٢ θ - جا^٢ θ$

، $جا ٢θ = ٢ جا θ جتا θ$

٥ إذا كان $ع = جا \frac{\pi}{٩} + ت جتا \frac{\pi}{٩}$

أوجد ع على الصورة المثلثية وأوجد الجذور التكعيبية للعدد $(ع)^٩$

الحل

نلاحظ أن العدد فى الربع الأول مقلوب

، $\frac{\pi}{٩} = ٢٠°$ ضخلبطا $٩٠ - ٢٠ = ٧٠°$

$ع = (جتا ٧٠° + ت جا ٧٠°)$

معلوم ! أنه إذا كان ع سعته ← θ

فإن مرافقه $\bar{ع}$ سعته ← $-\theta$

$\bar{ع} = [\text{جتا}(-٧٠^\circ) + \text{ت جا}(-٧٠^\circ)]$

$(\bar{ع})^{٩} =$ ← $-٧٠ \times ٩ = -٦٣٠ + ٣٦٠ + ٣٦٠ = ٩٠^\circ$

$(\bar{ع})^{٩} = (\text{جتا } ٩٠ + \text{ت جا } ٩٠^\circ)$

الجذور التكعيبية للعدد $(\bar{ع})^{٩}$

$= [\text{جتا} \frac{٩٠ + ٣٦٠ ر}{٣} + \text{ت جا} \frac{٩٠ + ٣٦٠ ر}{٣}]$

ر = ٠ $ع_١ = (\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$

ر = ١ $ع_٢ = (\text{جتا } ١٥٠^\circ + \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

ر = ٢ $ع_٣ = (\text{جتا}(-٩٠^\circ) + \text{ت جا}(-٩٠^\circ))$

---

٦ إذا كان $\frac{٧ - ١١ت}{٤ + ت} = أ + ب ت$

أوجد قيم المقدار $(\sqrt{-ب} + أ ت)^{\frac{٣}{٢}}$

الحل

$\frac{٧ - ١١ت}{٤ + ت} \times \frac{(٤ - ت)}{(٤ - ت)} = \frac{٢٨ - ٧ت - ٤٤ت - ١١}{١٦ + ١}$

$= \frac{١٧ - ٥١ت}{١٧} = \boxed{١ - ٣ت}$

∴ أ = ١ ، ب = -٣

نفرض أن $ع = (\sqrt{-ب} + أ ت)^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٣}{٢}}$

$ع = [٢(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)]^{\frac{٣}{٢}}$

مقلوب الأول والجديد نأخذ الجذرين

$ع = [٨(\text{جتا } ٩٠ + \text{ت جا } ٩٠^\circ)]^{\frac{١}{٢}}$

الجذران التربيعيان $٢\sqrt{٢}\,[\text{جتا} \frac{٩٠ + ٣٦٠ ر}{٢} + \dots$

ر = ٠ $ع_١ = ٢\sqrt{٢}\,(\text{جتا } ٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ)$

ر = ١ $ع_٢ = ٢\sqrt{٢}\,(\text{جتا}(-١٣٥^\circ) + \text{ت جا}(-١٣٥^\circ))$

---

٧ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ٧ - ٢٤ت

الحل

لاحظ أنه θ هنا مش هنطلع زاوية خاصة
هيكون فيها درجات ودقائق وثواني
لذلك هنحل بطريقة ثانية

بفرض أن $(٧ - ٢٤ت)^{\frac{١}{٢}} = س + ص ت$

بتربيع الطرفين

$٧ - ٢٤ت = س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت$

∴ $س^٢ - ص^٢ = ٧$ ← ①

$٢ س ص = -٢٤$ ← ②

لاحظ أنه $(س)(ص) = (٧)-(٢٤)$

∴ $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ ← ③

بجمع ① ، ③

$٢س^٢ = ٣٢$ ∴ $س^٢ = ١٦$

∴ $س = \pm ٤$

س = ٤	س = -٤
$ص = \frac{-٢٤}{٨} = -٣$	$ص = \frac{-٢٤}{-٨} = ٣$
الجذر الأول ٤ - ٣ت	الجذر الثاني = -٤ + ٣ت

٨ أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة

$س^٢ - (١+ت) س - ٦ + ٣ت = ٠$

الحل

نحلها بالقانون العام

$أ = ١$ $ب = -[١+ت]$ $جـ = -٦+٣ت$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$\therefore س = \frac{١+ت \pm \sqrt{(-١-ت)^٢ - ٤(-٦+٣ت)}}{٢}$

$= \frac{١+ت \pm \sqrt{٢ت + ٢٤ - ١٢ت}}{٢}$

$= \frac{١+ت \pm \sqrt{٢٤ - ١٠ت}}{٢}$

نفرض أن $\sqrt{٢٤ - ١٠ت} = أ + ب ت$ بتربيع الطرفين

$٢٤ - ١٠ت = أ^٢ - ب^٢ + ٢أب ت$

$\therefore أ^٢ - ب^٢ = ٢٤ \leftarrow (١)$

$٢أب = -١٠ \leftarrow (٢)$

لاحظ أن $(أ)(ب) = (٢٤) (-١٠)$

$\therefore أ^٢ + ب^٢ = ٢٦ \leftarrow (٣)$

بجمع (١) ، (٣)

$٢أ^٢ = ٥٠$ $\therefore أ^٢ = ٢٥$

$\therefore أ = \pm ٥$

$أ = ٥$	$أ = -٥$
$ب = \frac{-١٠}{١٠} = -١$	$ب = \frac{-١٠}{-١٠} = ١$

$\therefore أ + ب ت = \pm (٥ - ت)$

$\therefore س = \frac{١+ت+٥-ت}{٢}$ أو $س = \frac{١+ت-٥+ت}{٢}$

$س = ٣$ أو $س = -٢+ت$

$\therefore م.ح = \{٣ ، -٢+ت\}$

٩ أوجد جذور المعادلة $ع^٤ = ١$ ومثلها على مستوى أرجاند

الحل

$١ = [جتا ٠ + ت جا ٠]$

أكمل أنت بقى

(١٠) أثبت أن إحدى قيم المقدار

$\sqrt{ت} - \sqrt{-ت} = \sqrt{2}\,ت$

الحل

أولاً: $ت = جتا ٩٠^\circ + ت جا ٩٠^\circ$

وحسب الجذور التربيعية

$\therefore \sqrt{ت} = \left[جتا \left(\frac{٩٠ + ٣٦٠ ر}{٢} \right) + ت جا \left(\frac{٩٠ + ٣٦٠ ر}{٢} \right) \right]$

عند $ر = ٠$

$\therefore \sqrt{ت} = جتا ٤٥ + ت جا ٤٥$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} ت \leftarrow (١)$

عند $ر = ١$ $\sqrt{ت} = جتا ٢٢٥^\circ + ت جا ٢٢٥$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ت \leftarrow (٢)$

$\therefore \sqrt{ت} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} ت \right)$

ثانياً: $-ت = \left(جتا -٩٠^\circ + ت جا -٩٠^\circ \right)$

$\sqrt{-ت} = \left[جتا \frac{-٩٠ + ٣٦٠ ر}{٢} + ت جا \frac{-٩٠ + ٣٦٠ ر}{٢} \right)$

عند $ر = ٠$

$\sqrt{-ت} = جتا -٤٥^\circ + ت جا -٤٥^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ت \leftarrow (٣)$

عند $ر = ١$

$\sqrt{-ت} = جتا (١٣٥)^\circ + ت جا ١٣٥^\circ$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} ت \leftarrow (٤)$

$\therefore \sqrt{-ت} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ت \right)$

$\therefore \sqrt{ت} - \sqrt{-ت} = \pm \sqrt{2}$ أو $\pm \sqrt{2}\, ت$

$\therefore \sqrt{2}\, ت$ هي إحدى قيم المقدار

$\sqrt{ت} - \sqrt{-ت}$ #

(١١) أوجد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

حل المعادلة $ع^٣ = ١$

تحضير للدرس القادم

الدرس الرابع: الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

① الجذور التكعيبية للواحد هي

1 ، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت$ ، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت$

② 1 ، ω ، ω^2

③ $1+\omega+\omega^2=0$ مجموعهم = صفر

$1+\omega=-\omega^2$

$1+\omega^2=-\omega$

$\omega+\omega^2=-1$

④ حاصل ضربهم = ١ ∵ $\omega^3=1$

$\omega^2=\frac{1}{\omega}$

$\omega=\frac{1}{\omega^2}$

$\omega^3=1$

$\omega^6=1$ $\omega^{3n}=1$

⑤ الفرق بينهم $=\pm\sqrt{3}ت$

$\omega-\omega^2=\omega^2-\omega=\pm\sqrt{3}ت$

⑥ $(1+\omega)$ مرافقه $(1+\omega^2)$ وهكذا

فكرة المرافق إن لما نضربهم أو نجمعهم يطلع عدد حقيقي

لذلك العدد $\omega+ج\omega^2$

مرافقه $ب\omega^2+ج\omega$ وهكذا

⑦ $\omega^8=\omega^{6+2}=\omega^2$

$\omega^{100}=\omega^{99+1}=\omega$ وهكذا

① أوجد قيمة

$(\omega-\omega^2)^4=(\pm\sqrt{3}ت)^4=9$

② إذا كانت $س=\frac{-1+\sqrt{3}ت}{2}$

فإن $س^8+س^4=$ ......

الحل

لاحظ أن $س=\omega$

∴ $\omega^8+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$

③ $1+\omega+\omega^2+\omega^3+$ .... $+\omega^{100}=$ .....

$\boxed{1+\omega+\omega^2}+$ .... $+\boxed{\quad}+\omega^{99}+\omega^{100}$

$1+\omega=-\omega^2$

④ $(2+5\omega+2\omega^2)^5$

$(2+2\omega^2+5\omega)^5$

$(-2\omega+5\omega)^5$

$(3\omega)^5=243\omega^5=243\omega^2$

٥ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1 + \omega - \omega^2)^3$ ، $(1 - \omega + \omega^2)^3$

الحل

الجذر الأول $= (-\omega^2 - \omega^2)^3 = (-2\omega^2)^3$

$= -8\omega^6 = -8$

الجذر الثاني $= (-\omega - \omega)^3 = (-2\omega)^3$

$= -8\omega^3 = -8$

مجموع الجذرين $= -16$

حاصل ضربهما $= 64$

∴ المعادلة هي $س^2 + 16س + 64 = 0$

٦ $\sum_{ر=0}^{10} (1 + \omega^{ر} + \omega^{2ر})$

ر = ٠ ، ر = ١ ، ر = ٢

$(1 + 1 + 1) + 1 + \omega + \omega^2 + 1 + \omega^2 + \omega^4$

ر = ٣ ، ر = ٤ ، ر = ٥ ، ر = ٦

$(1+1+1) + \dots + \dots + (1+1+1) + \dots$

عند ر = ٠ ← ٣

ر = ٣ ← ٣

ر = ٦ ← ٣

ر = ٩ ← ٣

∴ المجموع = ١٢

٧ أوجد قيمة $(1 + \frac{1}{\omega} + ت)(1 + \frac{1}{\omega^2} + ت)$

الحل

$(1 + \omega^2 + ت)(1 + \omega + ت)$

$(-\omega + ت)(-\omega^2 + ت)$

$\omega^3 - \omega ت - \omega^2 ت - 1$

$1 - (\omega + \omega^2)ت - 1$

$= -(-1)ت = ت$

٨ إذا كان $س = \frac{-1 + \sqrt{3}ت}{2}$

أثبت أن

$س^6 + 6س^5 + 15س^4 + 20س^3 + 15س^2 + 6س + 1 = 0$

الحل

$س = \omega$

$\omega^6 + 6\omega^5 + 15\omega^4 + 20\omega^3 + 15\omega^2 + 6\omega =$

$= 1 + 6\omega^2 + 15\omega + 20 + 15\omega^2 + 6\omega$

$6\omega^2 + 6\omega = -6$

$15\omega + 15\omega^2 = -15$

∴ المقدار $= 1 + 20 - 6 - 15 =$ صفر

اختر الإجابة الصحيحة

١ العدد ω مرافقه

(أ) ω (ب) ω^2

(ج) ١ (د) $-\omega$

لأن $\omega + \omega^2 = -1$

$\omega \times \omega^2 = 1$

خلاص خفيف

٢ مرافق العدد $ت - \omega^2$ هو ....

(أ) $ت + \omega$ (ب) $-ت + \omega^2$

(ج) $-ت - \omega$ (د) $-ت + \omega$

٣ مرافق العدد $(ت + \omega)$ هو ....

(أ) $-ت + \omega$ (ب) $-ت + \omega^2$

(ج) $-ت - \omega$ (د) $-ت - \omega^2$

٤ $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{100} = \dots$

(أ) صفر (ب) ١

(ج) ω (د) $-\omega^2$

$\cdot + \dots + \omega^{99} + \omega^{100} = 1 + \omega = -\omega^2$

٥ $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{100} = \dots$

(أ) صفر (ب) ω

(ج) ω^2 (د) ١

$\omega + \omega^2 + \cdot + \dots + \cdot + \dots + 1 + \omega = \cdot + \omega$

٦ إذا كان $ع = \omega^{ن}$ فإن $|ع| = \dots$ حيث ن عدد صحيح موجب.

(أ) ١ (ب) ω

(ج) ن (د) ω^2

الفكرة ان ω احد الجذور التكعيبية للواحد الذي مقياسه = ١

٧ $\sum_{ر=1}^{6} (1 + \omega^{ر}) = \dots$

(أ) صفر (ب) ٦

(ج) ١ (د) $1 + \omega$

والسبب

ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

$1+\omega + 1+\omega^2 + 1+\omega^3 + 1+\omega^4 + 1+\omega^5 + 1+\omega^6$

$\omega + \omega^2 + \omega^3 = 0$

$\omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$

∴ الناتج $= 1+1+1+1+1+1 = 6$

٨ $(أ + ب\omega + أ\omega^2)(أ + ب\omega^2 + أ\omega^4) = \dots$

(أ) ١ (ب) أ − جـ

(ج) $(أ - ب)^2$ (د) $ع - أ^2$

$أ + أ\omega^2 = -أ\omega$ ، $أ + أ\omega^4 = -أ\omega^2$

$(ب\omega - أ\omega)$ $(ب\omega^2 - أ\omega^2)$

$\omega(ب - أ)\ \omega^2(ب - أ) = (ب - أ)^2$

على فكرة $(ب - أ)^2 = (أ - ب)^2$

٩ $\frac{أ - ء\omega}{أ\omega^2 - ء} - \omega^2 = \dots$

(أ) ٣ت (ب) $\pm\sqrt{3}\,ت$ (ج) −٣ (د) ٣

الحل

ضرب البسط × ω^3 = $\frac{أ\omega^3 - ء\omega^4}{أ\omega^2 - ء} = \frac{\omega(أ\omega^2 - ء)}{(أ\omega^2 - ء)}$

المقدار $= \omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}\,ت$

الوحدة الثالثة
المحددات والمصفوفات

① قيمة المحدد لا تتغير إذا

① دورنا الصفوف بالأعمدة

② تم الفك بأي صف أو عمود

③ أضفنا لأي صف أو عمود آخر

④ تختلف في الإشارة عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود

⑤ قيمة المحدد = صفر

⑥ إذا كانت عناصر صف أو عمود كلها أصفار

⑦ تساوت عناصر صفين أو عمودين

---

⑧ إذا كانت $أ_{٢×٣}$ فإن $أ^{مد}_{٣×٢}$

⑨ $أ_{٢×٣} + ب_{٢×٣} = ج_{٢×٣}$

⑩ $أ_{٢×٣} \cdot ب_{٣×٢} = ج_{٢×٢}$

⑪ $(أ^{مد})^{مد} = أ$

⑫ $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

⑬ $(أ^{-1})^{-1} = أ$

⑭ $(أ ب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$

⑮ $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

⑯ إذا كان $أ^{مد} = أ$ فإن أ متماثلة

⑰ إذا كان $أ^{مد} = -أ$ فإن أ شبه متماثلة

⑱ المصفوفة التي ليس لها معكوس ضربي تسمى (منفردة) أو شاذة

⑲ $أ^{-1} = \frac{1}{\Delta}$ (تبديل أماكن الرئيسي وتغيير إشارة القطري)

⑳ $أ س = ج$

$س = أ^{-1} ج$

㉑ رتبة المصفوفة غير الصفرية

= أعلى درجة لمحدد أو محدد ≠ صفر .

١ أوجد مجموعة حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} - ٨ = ٠ ، \text{ س} \in ح$$

الحل

$س^٣ - ٨ = ٠$ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

٢ إذا كانت

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ١٠$$

فأوجد

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ س & ص & ع \\ ء & هـ & و \end{vmatrix} = ...$$

-١٠ لاننا بدلنا ص٢ ، ص٣

٣

$$\begin{vmatrix} ا+ب & ٥ & ج \\ ب+ج & ٥ & ا \\ ا+ج & ٥ & ب \end{vmatrix}$$

الحل

ع١ + ع٢ + ع٣ ← ع١

$$\begin{vmatrix} ا+ب+ج & ٥ & ج \\ ا+ب+ج & ٥ & ا \\ ا+ب+ج & ٥ & ب \end{vmatrix}$$

∴ قيمة المحدد = صفر

لأن ع١ ∝ ع٢

٤ إذا كانت

$$\begin{vmatrix} لو_٢ ٣ & ٣ & ٩ \\ ٠ & لو_٣ ٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & لو_٥ س \end{vmatrix} = ٤$$

فأوجد س = ...

الحل

$لو_٢ ٣ \times لو_٣ ٥ \times لو_٥ س = ٤$

$\frac{لو ٣}{لو ٢} \times \frac{لو ٥}{لو ٣} \times \frac{لو س}{لو ٥} = ٤$

$\frac{لو س}{لو ٢} = ٤$

$لو_٢ س = ٤$

$س = ٢^٤$ ∴ س = ١٦

٥ أوجد قيم ك التى تجعل س عاملاً للمحدد

$$\begin{vmatrix} س+١ & ٣ & ١ \\ ك & ٢ & ٣ \\ س & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

بوضع س = ٠ ينتج أن Δ = ٠

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ك & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \quad (ص_٢ - ك ص_١)$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & ٢-٣ك & ٣-ك \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$١(٢-٣ك) - ٢(٣-ك) = ٠$

$٢ - ٣ك - ٦ + ٢ك = ٠$

$٢ - ٦ - ك = ٠$ ∴ ك = -٤

(٦) بدون/باستخدام خواص المحددات اثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ أ & ب & ج \\ أ^2 & ب^2 & ج^2 \end{vmatrix} = (ب-أ)(ج-أ)(ج-ب)$$

الحل

$ص_2 - أ\,ص_1$ ، $ص_3 - أ^2\,ص_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ب-أ & ج-أ \\ 0 & ب^2-أ^2 & ج^2-أ^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (ب-أ) & (ج-أ) \\ 0 & (ب-أ)(ب+أ) & (ج-أ)(ج+أ) \end{vmatrix}$$

$ص_3 - (ب+أ)\,ص_2$

$$(ب-أ)(ج-أ)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{ب-أ} & \frac{1}{ج-أ} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & ب+أ & (ج+أ) \end{vmatrix}$$

$$(ب-أ)(ج-أ)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{ب-أ} & \frac{1}{ج-أ} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (ج+أ)-ب-أ \end{vmatrix}$$

$$= (ب-أ)(ج-أ)(ج-ب) \quad \#$$

(٧) بدون فك المحدد اثبت أنه

$$\begin{vmatrix} ب ج & ج^2 & ب^2 \\ ج^2 & ج أ & أ^2 \\ ب^2 & أ^2 & أ ب \end{vmatrix} = أ ب ج \begin{vmatrix} أ & ج & ب \\ ج & ب & أ \\ ج & أ & ب \end{vmatrix}$$

الحل

بضرب $ص_1 \times أ$ ، $ص_2 \times ب$ ، $ص_3 \times ج$

$$\frac{1}{أ ب ج}\begin{vmatrix} أ ب ج & أ ج^2 & أ ب^2 \\ ب^2 ج & أ ب ج & أ^2 ب \\ ج^2 ب & أ^2 ج & أ ب ج \end{vmatrix}$$

ناخذ من $ع_1$ $ب ج$

من $ع_2$ $أ ج$

من $ع_3$ $أ ب$

$$\frac{ب ج \cdot أ ج \cdot أ ب}{أ ب ج}\begin{vmatrix} أ & ج & ب \\ ج & ب & أ \\ ب & أ & ج \end{vmatrix}$$

$$أ ب ج\begin{vmatrix} أ & ج & ب \\ ج & ب & أ \\ ب & أ & ج \end{vmatrix}$$

(٨) بدون فك المحدد اثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س & ص & س \\ س & س & -ص \end{vmatrix} = س^2 - ص^2$$

الحل

$ص_2 - س\,ص_1 \leftarrow ص_2$

$ص_3 - س\,ص_1 \leftarrow ص_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ص-س & 0 \\ 0 & 0 & -ص-س \end{vmatrix}$$

$$= (ص-س)(-ص-س)$$

$$= (س-ص)(ص+س)$$

$$= س^2 - ص^2 \quad \#$$

٩ إذا كانت أَ ، بَ ، جَ هي أطوال أضلاع مثلث مشابه فيه

$$\begin{vmatrix} أ' & ب' & جـ' \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ حاأ & حاب & حاجـ \end{vmatrix} = ...$$

الحل

$$\frac{أ'}{حاأ} = \frac{ب'}{حاب} = \frac{جـ'}{حاجـ} = ٢نق$$

أَ = ٢نق حاأ ، بَ = ٢نق حاب

جَ = ٢نق حاجـ

$$\begin{vmatrix} ٢نق\,حاأ & ٢نق\,حاب & ٢نق\,حاجـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ حاأ & حاب & حاجـ \end{vmatrix}$$

بأخذ ٢نق عامل مشترك من ص١

$$٢نق \begin{vmatrix} حاأ & حاب & حاجـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ حاأ & حاب & حاجـ \end{vmatrix}$$

∵ ص١ = ص٣ ∴ قيمة المحدد = صفر

١٠ أثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ ب جـ & أ جـ & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

من الطرف الأيسر بأخذ أ ، ب ، جـ مشترك من ع١ ، ع٢ ، ع٣ بالترتيب

$$أ ب جـ \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ \frac{١}{أ} & \frac{١}{ب} & \frac{١}{جـ} \end{vmatrix}$$

نضرب ص٣ × أ ب جـ

$$= \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ ب جـ & جـ أ & أ ب \end{vmatrix} = الأيمن$$ #

١١ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ^2+١ & أ ب & أ جـ \\ أ ب & ب^2+١ & ب جـ \\ أ جـ & ب جـ & جـ^2+١ \end{vmatrix} = أ^2+ب^2+جـ^2+١$$

الحل

من الطرف الأيمن بإخراج أ ، ب ، جـ من ص١ ، ص٢ ، ص٣ بالترتيب

$$أ ب جـ \begin{vmatrix} أ+\frac{١}{أ} & ب & جـ \\ أ & ب+\frac{١}{ب} & جـ \\ أ & ب & جـ+\frac{١}{جـ} \end{vmatrix}$$

بضرب ع١ × أ ، ع٢ × ب ، ع٣ × جـ

$$\begin{vmatrix} أ^2+١ & ب^2 & جـ^2 \\ أ^2 & ب^2+١ & جـ^2 \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2+١ \end{vmatrix}$$

ع١ + (ع٢ + ع٣)

$$\begin{vmatrix} أ^2+ب^2+جـ^2+١ & ب^2 & جـ^2 \\ أ^2+ب^2+جـ^2+١ & ب^2+١ & جـ^2 \\ أ^2+ب^2+جـ^2+١ & ب^2 & جـ^2+١ \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2+1)\begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2 & \text{ج}^2 \\ 1 & \text{ب}^2+1 & \text{ج}^2 \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ج}^2+1 \end{vmatrix}$$

$(\text{ص}_2-\text{ص}_1)$ ، $(\text{ص}_3-\text{ص}_1)$

$$(\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2+1)\begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2 & \text{ج}^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2+1) \quad \#$$

---

١٢ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب})$$

الحل

بإجراء $(\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3)$ وأخذ $(\text{س}+\text{أ}+\text{ب})$ مشترك من ع_1

$$(\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{س} & \text{ب} \\ 1 & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$(\text{ص}_2-\text{ص}_1)$ ، $(\text{ص}_3-\text{ص}_1)$

$$(\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 0 & \text{س}-\text{أ} & 0 \\ 0 & 0 & \text{س}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب}) \quad \#$$

١٣ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}+2 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & 2\text{أ}+\text{ب}+1 & \text{ب} \\ 1 & \text{أ} & \text{أ}+2\text{ب}+1 \end{vmatrix} = 2(\text{أ}+\text{ب}+1)^3$$

الحل

بإجراء $(\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3)$ ثم أخذ $2(\text{أ}+\text{ب}+1)$ عامل مشترك من ع_1

$$2(\text{أ}+\text{ب}+1)\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & 2\text{أ}+\text{ب}+1 & \text{ب} \\ 1 & \text{أ} & \text{أ}+2\text{ب}+1 \end{vmatrix}$$

بإجراء $(\text{ص}_2-\text{ص}_1)$ ، $(\text{ص}_3-\text{ص}_1)$

$$2(\text{أ}+\text{ب}+1)\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 0 & \text{أ}+\text{ب}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{أ}+\text{ب}+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\text{أ}+\text{ب}+1)^3 \quad \#$$

الدرس الثاني المصفوفات

راجع على الملاحظات في أول الوحدة ص ٤١

---

(١) $أ = \begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$

فإن $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{pmatrix}$

---

(٢) المصفوفة المنفردة (الشاذة)

فيها $\Delta =$ صفر وليس لها معكوس ضربي

---

(٣) المصفوفة غير المنفردة (غير الشاذة)

فيها $\Delta \neq ٠$ ويكون لها معكوس ضربي

---

(١) أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة التالية

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٦ - ٥ = ١$

$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$

---

(٢) أوجد قيم س التي تجعل المصفوفة التالية منفردة

$ب \begin{pmatrix} ٧ & س-٢ \\ س & ٥ \end{pmatrix}$

الحل

$س(س - ٢) - ٣٥ = ٠$

$س^٢ - ٢س - ٣٥ = ٠$

$(س - ٧)(س + ٥) = ٠$

إما $س = ٧$ أو $س = -٥$

---

(٣) أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

الحل

إيجاد قيمة المحدد $|أ| = ٢(٣ - ٠) - ١(-١ - ٢٠) - ٢(٠ - ١٢)$

$= ٥١ \neq ٠$ أي لها معكوس ضربي

إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة

$$م = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\therefore م = \begin{pmatrix} -١٢ & ٢١ & ٣ \\ ٤ & ١٠ & -١ \\ ٧ & -٨ & ١١ \end{pmatrix}$$

المصفوفة الملحقة $أ^{مد} = م^{مد} = \begin{pmatrix} ١١ & -١ & ٣ \\ -٨ & ١٠ & ٢١ \\ ٧ & ٤ & -١٢ \end{pmatrix}$

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٥١} \begin{pmatrix} ١١ & -١ & ٣ \\ -٨ & ١٠ & ٢١ \\ ٧ & ٤ & -١٢ \end{pmatrix}$$

④ إذا كانت المصفوفة منفردة فأوجد قيمة س = ... للمصفوفة

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ س+١ & ٣س & ٢س \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$$

∵ المصفوفة منفردة ∴ Δ = ٠ ، |أ| = ٠

$$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ س+١ & ٣س & ٢س \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

٣(١٢س − ٢س − ٢) + ١(٨س − ٤س − ٤) + ٣(٤س − ١٢س) = ٠

٣(١٠س − ٢) + (٤س − ٤) − ٢٤س = ٠

٣٠س − ٦ + ٤س − ٤ − ٢٤س = ٠

١٠س − ١٠ = ٠

∴ ١٠س = ١٠

∴ س = ١

---

⑤ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}$

فأثبت أن أ^{٢} − ٧أ − ٨I = □

ثم أوجد من ذلك المعكوس الضربي أ

أ^{٢} = أ × أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٨+٦ & ٢٠+٩ \\ ١٦+٢٠ & ٤٠+٣٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ١٤ & ٢٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix}$

أ^{٢} = $\begin{pmatrix} ١٤ & ٢٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -١٤ & -٢١ \\ -٢٨ & -٧٠ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -٨ & ٠ \\ ٠ & -٨ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ #

لإيجاد أ$^{-١}$ نضرب طرفي في أ$^{-١}$

أ$^{-١}$ أ^{٢} − ٧ أ$^{-١}$ أ − ٨ أ$^{-١}$ I = □

أ − ٧I − ٨أ$^{-١}$ = □

−٨أ$^{-١}$ = −أ + ٧I = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -١٠ \end{pmatrix}$

∴ أ$^{-١}$ = $\frac{١}{٨}$ $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٣ & ١٠ \end{pmatrix}$

(احنا استخدمنا الطريقة دي لأنه قال ومن ثم أوجد أ$^{-١}$)

ولكن إذا طلب أ$^{-١}$ بدون شرط

أ$^{-١}$ = $\frac{١}{Δ}$ (نقلب ↔ نغير)

Δ = ١٢ − ٢٠ = −٨

$\frac{١}{-٨}$ $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -١٠ \end{pmatrix}$

= $\frac{١}{٨}$ $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٣ & ١٠ \end{pmatrix}$

٦ إذا كان $A = \begin{pmatrix} س & ٢ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix}$

وكانت $A^{مد} = A^{-1}$

أوجد قيم س، ص، ع

الحل

بالضرب × A من جهة اليمين

$\therefore A^{مد} A = A^{-1} A = I$

$\therefore \begin{pmatrix} س & س & س \\ ٢ص & ص & -ص \\ ع & -ع & ع \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س & ٢ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix}$

$= I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

بإجراء الضرب نكون الأولى صفوف والثانية أعمدة

$= \begin{pmatrix} س^2+س^2+س^2 & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ص^2+ص^2+ص^2 & ٠ \\ ٠ & ٠ & ع^2+ع^2+ع^2 \end{pmatrix} = I$

$٣س^2 = ١ \quad \therefore س = \pm \frac{1}{\sqrt{٣}}$

$٦ص^2 = ١ \quad ص = \pm \frac{1}{\sqrt{٦}}$

$٣ع^2 = ١ \quad \therefore ع = \pm \frac{1}{\sqrt{٣}}$

لاحظ أنه

* رتبة المصفوفة « ر »

رتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر.

١

A $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ر(A) = صفر

ب $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ر(ب) = ١

ج $\begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$ ر(ج) = ١

د $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ر(د) = ١

ر(A) = ر(A)^{مد}

(٢) أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية

أ = $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ـ ـ ـ ـ

الحل

٢×٣ وليست صفر وليست ٣

إما ١ أو ٢

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ ∴ ر(أ) = ٢

---

(٣) ب = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

الحل

ب ٢×٣ ليست صفر وليست ٣

١ أو ٢

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ، $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 0$

∴ ر(ب) = ١

---

(٤) جـ = $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \\ 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

الحل

جـ ٣×٣ إما ١ أو ٢ أو ٣

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \\ 10 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$

لأن ص٣ = ٣ص١

∴ ر ≠ ٣

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$

∴ ر(جـ) = ٢

---

(٥) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & ك \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

وكانت ر(أ) = ٢ فأوجد قيمة ك

الحل

∵ ر(أ) = ٢ ∴ المحدد الثلاثي = صفر

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & ك \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$1(0 - 2) + 2(-ك - 3) + 3(2ك - 0) = 0$

$-2 - 2ك - 6 + 6ك = 0$

$4ك - 8 = 0$ ، $4ك = 8$

∴ ك = ٢

لاحظ

رتبة أ = رتبة $أ^{مد}$

إذا كانت أ مصفوفة ن×ن فإن ر(أ) ≤ ن

بحث امكانية حل نظام مكون من (ن) معادلة

١) نكتب المعادلة المصفوفية أ س = ب
معاملات — مجاهيل — ثوابت

٢) نوجد أ*

٣) نوجد ر(أ) ، ر(أ)*

الحالة الأولى غير متجانسة ب ≠ □

* ر(أ) = ر(أ)* = ن حل وحيد
* ر(أ) = ر(أ)* < ن عدد لا نهائي من الحلول
* ر(أ) ≠ ر(أ)* لا يوجد حل

الحالة الثانية المتجانسة ب = □

* ر(أ) = ن حل وحيد [البديهي] الصفري
* ر(أ) < ن عدد لا نهائي من الحلول

١) بين أن للنظام التالي حلاً صفرياً فقط

٢س + ٧ص + ٣ع = ٠
٣س + ص − ٢ع = ٠
٤س − ٣ص − ع = ٠

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ٣ \\ ٣ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & -١ \end{vmatrix}$$

= −٢ − ٢٧ − ٥٦ − ١٢ − ١٢ + ٢١ ≠ صفر

∴ ر(أ) = ر(أ)* = ن = ٣

وحيث أن النظام متجانس
∴ يوجد حل وحيد وهو الحل الصفري
م.ح = {(٠ ، ٠ ، ٠)}

٢) بين أن للنظام التالي عدد لا نهائي من الحلول واكتب صورة الحل

س + ٢ص = ٣
٢س + ٤ص = ٦

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ ر(أ) = ١ < عدد المجاهيل
∴ للنظام عدد لا نهائي من الحلول
صورة الحل بوضع ص = ك
∴ س + ٢ك = ٣
∴ س = ٣ − ٢ك

∴ مجموعة الحل م.ح = {(٣ ، ٣-٤ل ، ل) ، ل ∈ ح}

س٣ حل أنظمة المعادلات التالية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة:

٣س + ٢ص = ٨

٣ص + ٢ع = ٩

٢س + ٣ع = ١٣

مجبر ترتيب

الحل

معادلة المصفوفة: م س = ب

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

∴ $|م| = 3(9 - 0) - 2(0 - 4)$

$= 27 + 8 = 35$

نوجد مصفوفة العوامل المرافقة

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 4 & -6 \\ -6 & 9 & 4 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

نوجد المصفوفة الملحقة وهى مدور المصفوفة المرافقة

$$م^{ملحقة} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$م^{-1} = \frac{1}{|م|} م^{ملحقة}$$

$$م^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 72 - 54 + 52 \\ 32 + 81 - 78 \\ -48 + 36 + 117 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ٣

انتهى الجبر بفضل الله وتوفيقه